Algorithmique des réseaux sociaux	**2013/2014**
Cours 5 — 18 Novembre	
Enseignant: Marc Lelarge	*Scribe: Axel Davy*

Pour information

- Page web du cours
  `http://www.di.ens.fr/~lelarge/soc.html`

5.1 Agrégation de classements

Le but de cette partie est d'étudier les différentes méthodes d'obtention d'un concensus sur des ordres.

5.1.1 Point de vue axiomatique : théorie du choix social

EXEMPLE 5.1.1: Election présidentielle :
Soit une population donnée et trois candidats : FH, NS et FB.
Les ordres de préférences de la population sont :

ordre	proportion
FH-NS-FB	49%
NS-FH-FB	48%
FB-NS-FH	3%

Quel est le vainqueur légitime ?

Si on choisi de prendre le critère du scrutin majoritaire simple, FH gagne. Cependant on peut critiquer ce choix étant donné que 51% de la population préfère NS à FH.

Définition 5.1.1 *La méthode de Borda, datant de 1784, est que pour chaque votant, chaque candidat obtient un score égal au nombre de candidats qu'il bat. Les candidats sont classés par la somme de leurs scores.*

EXEMPLE 5.1.2: En appliquant la méthode de Borda à l'exemple précédent, on obtient les scores suivants :

NS :	49+2x48+3	= 148
FH :	49x2+48	= 146
FB :	3x2	= 6

On obtient alors que NS gagne.

Cette proposition n'est pas exempte de problèmes. Considérez par exemple :

ordre	proportion
A > B > C	51%
B > C > A	49%

A a un score de 102, et B un score de 149. D'après la méthode de Borda, B devrait gagner. Pourtant la majorité de la population lui préfère A.

Définition 5.1.2 *Critère de Condorcet : Si un candidat A est majoritairement préféré à B, alors A doit précéder B dans le classement final.*

Exemple 5.1.3: On considère une population de 27 votants.

ordre							votants
x	>	y	>	z	>	t	5
x	>	z	>	t	>	t	4
t	>	y	>	x	>	z	2
t	>	y	>	z	>	x	6
z	>	y	>	x	>	t	8
t	>	z	>	y	>	x	2

On note m_{AB} le nombre de personnes préférant A à B.
On a : $m_{yx} = 18$, $m_{xt} = 17$, $m_{yt} = 17$, $m_{zx} = 16$, $m_{zy} = 14$, $m_{zt} = 17$
On voit que z est préféré à tous les autres, que y est préféré à x et t et que x est préféré à t.
On obtient donc le classement suivant :

z > y > x > t

Avec les autres critères, on obtient :
scrutin uninominal à 1 tour : vainqueur t
scrutin uninominal à 2 tours : vainqueur x
Méthode de Borda : y (48 points) > z (47) > x(37) > t(30)

Le critère de Condorcet peut aussi être mis en défaut :
Supposons qu'il y ait 3 votants et 3 candidats.
A > B > C : 1 votant.
B > C > A : 1 votant.
C > A > B : 1 votant.
La majorité préfère A à B, B à C et C à A. Comment départager ?

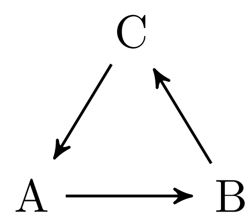

FIGURE 5.1. graphe des préférences

Théorème 5.1.1 *Théorème de Mc Garvey (1953) : Tout motif de préférences deux à deux entre candidats peut s'obtenir par la majorité.*

EXEMPLE 5.1.4: Pour obtenir le graphe de la figure 5.2

A > B > C > D > E
C > E > B > D > A
D > E > A > B > C

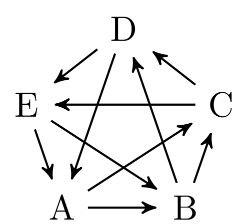

FIGURE 5.2. graphe des préférences

Définition 5.1.3 *Critère de Condorcet étendu (CCE) : Si X,Y est une partition de l'ensemble V des candidats (i.e. $X \cap Y = \emptyset$ et $X \cup Y = V$) telle que $\forall (x, y) \in X \times Y$, x est préféré à y par une majorité de votants, alors tous les éléments de X doivent être classés avant ceux de Y dans la préférence collective.*

Théorème 5.1.2 *Pour tout profil des électeurs, il existe un concensus satisfaisant le CCE*

Définition 5.1.4 *Un tournoi est un graphe complet orienté. Une autre définition est que c'est un graphe G sur V, tel que si $x > y$, alors il y a un arc équilibré de x vers y. Ou encore que c'est un graphe orienté obtenu en orientant chaque arête d'un graphe complet non-orienté.*

Lemme 5.1.1 *Chaque tournoi contient un chemin Hamiltonien.*

Démonstration. pour $n = 1$, le lemme est vrai.
Soit $n \geq 2, x \in V$ arbitraire.
Soit $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ un chemin Hamiltonien de $G[V - x]$.
Si $x \to x_1$ ou $x \to x_{n-1}$ alors on rajoute x en début/fin,
sinon $\exists k, 1 \leq k \leq n-2, x_k \to x \to x_{k+1}$
On a donc un chemin Hamiltonien. □

Démonstration. (du theorème 5.1.2)
On choisi l'ordre obtenu par un chemin Hamiltonien. Si celui-ci ne vérifiait pas CCE, on aurait : $\exists(X, Y)$ partition de $V, x \in X, y \in Y, x > y$ mais y précède x dans l'ordre du chemin. Il doit y avoir une telle paire de sommets adjacents, ce qui aboutit à une contradiction. □

Rappel :
Un **ordre total** vérifie :

antisymétrie :	si $a \geq b$ et $b \geq a$ alors $a = b$.
transitivité :	si $a \geq b$ et $b \geq c$ alors $a \geq c$
total :	$a \geq b$ ou $b \geq a$

Un **ordre total strict** vérifie de plus : $a > b \Leftrightarrow a \geq b$ et $a \neq b$

Définition 5.1.5 *Une fonction (ou règle) d'agrégation de préférences est une fonction donnant une préférence collective $>$ à partir du profil des votants :*

$$f(>_1, .., >_k) = >$$

avec $>_1$ l'ordre de l'électeur 1, etc.

Voyons quelques propriétés que "devraient" avoir les règles de préférences :

- **Non-restriction du domaine (NRD)** : une règle de préférence satisfait NRD si tout profil $(>_1, ..., >_k)$ est permis
- **Condition de Pareto ou Unanimité (P)** : une règle de préférence satisfait P, si pour tout profil et tout x, y, tels que $x >_i y$ pour tout votant i implique $x > y$.
- **Non-dictature (ND)** : Un votant i est un dictateur pour la règle de préférence si pour tout profil $> = >_i$. Une règle de préférence satisfait ND si il n'existe pas de dictateur.
- **Indépendance (des alternatives irrelevantes) (I)** : une règle de préférence satisfait I si la préférence collective entre x et y ne dépend que des préférences des votants concernant x et y (et pas des autres alternatives).
- **Monotonie (M)** : une règle de préférence satisfait P, si $a > b$ et $b >_i a$ alors échanger a et b dans $>_i$ ne résulte pas en $b > a$.
- **Non trivial (NT)** : une règle de préférence satisfait NT, si pour tout $x, y \in V$ il existe un profil tel que $x > y$

Proposition 5.1.1 *(NT) + (M) + (I) ⇒ (P)*

Propriété : Le scruting uninominal à 2 tours est une règle de préférence qui vérifie (NRD), (ND) mais pas (M), (I).

EXEMPLE 5.1.5: Le scruting uninominal à 2 tours ne vérifie pas M :

ordre					votants	avec spot publicitaires pour x
x	>	y	>	z	6	8
z	>	x	>	y	5	5
y	>	z	>	x	4	4
y	>	x	>	z	2	0

Dans cette configuration, x et y se retrouvent au second tour, et x gagne.
Supposons que les 2 derniers votants changent pour $x > y > z$, alors x et z se retrouvent au second tour, et z gagne.

EXEMPLE 5.1.6: Le scruting uninominal à 2 tours ne vérifie pas I :

ordre					votants
x	>	y	>	z	5
x	>	z	>	y	7
y	>	x	>	z	3
y	>	z	>	x	7
z	>	x	>	y	3
z	>	y	>	x	6

Au second tour, x et y s'affrontent, et y gagne. Supposons maintenant que x se soit retiré. On obtient

ordre			votants
y	>	z	15
z	>	y	16

z l'emporte.

Propriété : La méthode de Borda satisfait (NRD), (M), (P) et (ND), mais pas (I)

EXEMPLE 5.1.7:

ordre							votants
x	>	t	>	z	>	y	2
y	>	x	>	t	>	z	2
t	>	z	>	y	>	x	3

On a donc x=10, y=9, z=8, t=15, soit t>x>y>z

Cependant si t se retire

ordre					votants
x	>	z	>	y	2
t	>	x	>	z	2
z	>	y	>	x	3

soit z>y>x

Théorème 5.1.3 *(Theorème d'Arrow : 1952)*
Avec au moins 3 candidats, il n'existe pas de règle de préférence satisfaisant (NRD), (M), (NT), (I) et (ND).

Remarque 5.1.1 *On peut remplacer dans l'énoncé du théorème (NT) et (M) par (P)*

La démonstration est laissé au lecteur en exercice.