Correction TD numéro 8

Flots dans un réseau

Préliminaires :

1 Rappels sur les algorithmes de flot maximal

Par linéarité de l'addition, et $f(u, V) = 0$ pour tout u différent de s et t. L'avant-dernière égalité provient du fait que $X \setminus s$ ne contient ni s, ni t qui est censé être dans $\bar{X} = V \setminus X$.

$$f(X, \bar{X}) = f(X, V) - f(X, X) = f(s, V) + f(X \setminus s, V) = f(s, V) = |f|$$

Ensuite, $|f| = f(X, \bar{X}) = \sum_{u \in X} \sum_{v \in \bar{X}} f(u, v) \leq \sum_{u \in X} \sum_{v \in \bar{X}} cap(u, v) = cap(X, \bar{X})$.

Max-flow Min-Cut Theorem : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un flot maximal*
2. *il n'y a pas de chemin améliorant pour f*
3. *$|f| = cap(X, \bar{X})$ pour une coupe $X, \bar{X}$*

Preuve :

1) ⇒ 2) : S'il y a un chemin améliorant p pour f, alors on peut augmenter le flot en utilisant p.

2) ⇒ 3) : Supposons qu'il n'existe pas de chemin améliorant pour f. Soit X l'ensemble des sommets atteignables à partir de s dans le graphe résiduel R_f et $\bar{X} = V \setminus X$. Alors $X, \bar{X}$ est une coupe, et

$$|f| = \sum_{u \in X, v \in \bar{X}} f(u, v) = \sum_{u \in X, v \in \bar{X}} cap(u, v) = cap(X, \bar{X}),$$

car $u \in X, v \in \bar{X}$ implique que l'arête (u, v) n'est pas une arête de R_f, c'est-à-dire $f(u, v) = cap(u, v)$.

3) ⇒ 1) : Comme $|f| \leq cap(X, \bar{X})$ pour tout flot f et toute coupe $X, \bar{X}$, $|f| = cap(X, \bar{X})$ implique que f est un flot maximal et $X, \bar{X}$ est une coupe minimale.

Ce théorème donne une méthode pour construire un flot maximal en itérant la recherche d'un chemin améliorant. On commence avec le flot nul et en répétant la recherche d'un chemin améliorant jusqu'à obtenir un flot sans chemin améliorant. Comme la recherche d'un chemin améliorant (un chemin dans le graphe résiduel peut être implémenté en $O(n + m)$, si les capacités sont entières, le flot sera entier et la complexité est $O(|f^*(n + m)|)$.)

Connaissant un flot maximal, on peut calculer une coupe minimale séparant s et t en temps $O(m)$.

Théorème : *En commençant par le flot zéro, il est possible de construire un flot maximal en au plus $m = |E|$ étapes, chacune d'elles augmente le flot sur un seul chemin dans le graphe d'origine.*

Preuve : Soit f^* le flot maximal et G^* le sous-graphe de G induit par les arêtes (u, v) telles que $f^*(u, v) > 0$. On initialise $i = 1$, et on répète l'étape suivante jusqu'à ce que t ne soit pas accessible à partir de s dans G^*.

Étape pour trouver le chemin : Trouver un chemin p_i de s à t dans G^*. Soit Δ_i le minimum de $f^*(u, v)$ pour une arête (u, v) de p_i. Pour toute arête (u, v) de p_i, on diminue f^* de Δ_i et on élimine (u, v) de G^* si son flot est nul. On augmente ensuite i de un.

Chaque étape pour trouver un chemin élimine au moins une arête de G^*, et donc cet algorithme s'arrête après au plus m étapes, en ayant réduit f^* à la valeur nulle. (Il peut y avoir des cycles.)

Ensuite, on commence à partir du flot nul et successivement on pousse Δ_1 unités de flots le long de p_1, Δ_2 unités de flot le long de p_2, ... ce qui produit un flot maximal en au plus m étapes.

Une méthode naturelle pour sélectionner les chemins améliorants est d'en choisir toujours un de capacité résiduelle maximale, comme l'ont suggéré Edmonds et Karp.

Théorème *En augmentant toujours le chemin de capacité résiduelle maximale, les valeurs successives du flot convergent vers le flot maximal. Si les capacités sont des entiers, la méthode trouve un flot maximal en $O(m \log c)$ chemins améliorants où c est le maximum des capacités des arêtes.*

Preuve : Soit f un flot et f^* un flot maximal. Il existe alors un flot f' dans le graphe résiduel de valeur $|f^*|-|f|$. D'après le théorème précédent, il y a m chemins améliorants dont la somme des capacités est au moins $|f'|$, et donc la capacité maximale du chemin améliorant est au moins $(|f^*| - |f|)/m$.

Considérons une suite de $2m$ augmentations successives de capacité maximale en commençant au flot f. Au moins un parmi eux augmente le flot d'une valeur inférieure à $(|f^*| - |f|)/(2m)$. Ainsi, après $2m$ augmentations, la capacité maximale d'un chemin améliorant est réduit d'un facteur deux. Comme la capacité est au plus c, et est au plus celle du flot maximale, après $O(m \log c)$ augmentations maximales, le flot est maximal.

Analyse de Edmonds-Karp

1. L'algorithme de Edmonds-Karp calcule un plus court chemin améliorant γ de s à t (en nombre d'arêtes). Il ajoute à f, le flot f^+ définie sur les arêtes de γ par

$$\min_{(u,v)\in\gamma} (cap(u, v) - f(u, v))$$

et sur les arêtes opposées par la quantité opposée. Il ajoute f^+ à f. Cette procédure est itérée jusqu'à obtention d'un flot maximum.

2. On considère un contre-exemple

$$d_i(s, v) > d_{i+1}(s, v)$$

avec $k = d_{i+1}(s, v)$ minimal (le plus proche de s). On note que $k \neq 0$. Soit p un plus court chemin de s à v dans le graphe résiduel R_{i+1} calculé après la i-ième itération de Edmonds-Karp.

Soit u le sommet qui précède v sur le chemin p (dont l'existence est assurée car $k \neq 0$). On a alors

$$d_{i+1}(s, u) = k - 1$$

et à cause de la minimalité de k

$$d_i(s,u) \leq k-1 \tag{1}$$

On distingue deux cas :

a) (u,v) est une arête de R_i. Il vient $d_i(s,v) \leq k-1+1 = k$. Contradiction.

b) (u,v) n'est pas une arête de R_i. Comme c'est une arête de R_{i+1}, le chemin améliorant correspondant à la i-ième itération de Edmonds-Karp a nécessairement emprunté l'arête (v,u) et donc

$$d_i(s,u) = d_i(s,v) + 1 > k+1$$

ce qui contredit linégalité **??** ci-dessus.

3. Si (u,v) est i-critique, le chemin améliorant choisi dans le graphe résiduel R_i calculé après la i-ième itération emprunte l'arête (u,v), d'où

$$d_i(s,v) = d_i(s,u) + 1$$

Pour que (u,v) devienne j-critique, il est nécessaire que l'arête (v,u) ait été emprunté lors de la ℓ-ième itération de l'algorithme pour un ℓ tel que $i < \ell \leq j$. On a alors :

$$d_\ell(s,u) = d_\ell(s,v) + 1$$

En rapprochant les deux inégalités et en utilisant la question 1, il vient

$$\begin{aligned} d_i(s,u) &= d_i(s,v) - 1 \leq d_\ell(s,v) - 1 \\ &= d_\ell(s,u) - 2 \leq d_j(s,u) - 2 < d_j(s,u) \end{aligned}$$

4. D'après la question 3), chaque arête ne peut être critique qu'au plus n fois, ce qui borne par nm le nombre d'itérations. Le calcul d'un plus court chemin par un algorithme de parcours en largeur est en $O(n+m)$. La complexité d'Edmonds-Karp est en $O((n+m)nm) = O(n^2m + nm^2) = O(nm^2)$ dès que $n \leq m$.

2 Applications des algorithmes de flot

Maintenant que l'on sait que le problème du flot maximum se résout en temps polynomial, on peut montrer que d'autres problèmes peuvent aussi se résoudre en temps polynomial via une réduction au problème de flot maximal. Il y a les problèmes à sources et puits multiples (cf. exo 1) ou le problème de trouver un couplage maximal dans un graphe biparti en temps $O(nm)$.

Exercice 1 :

1. Il suffit d'ajouter au graphe G une source s, à laquelle on relie toutes les places par des arêtes de capacité unitaire, et un puits t auquel on relie toutes les issues avec une arête de capacité unitaire. Ensuite, on rend le graphe orienté en remplaçant chaque arête (u,v) par une arête (u,v) et une arête (v,u). (L'idée est de passer d'un problème à n sources (places) et m puits (issues) à un problème à une source et un puits.) On attribue aussi aux arêtes internes une capacité unitaire. Pour éviter que deux chemins

aient un sommet en commun, on impose une contrainte au sommet en disant que le flot entrant est au plus un.

L'application d'un algorithme de flot fournit un flot maximal à valeur dans $\{0, 1\}$. À chaque arête traversée par un flot de capacité unitaire, on associe une arête du plan d'évacuation. La contrainte sur les sommets garantit que les différents chemins sont à sommets disjoints car au plus une arête peut entrant dans un sommet peut être saturée, puisque le flot est à valeur dans $\{0, 1\}$. Enfin, la conservation du flot en chaque sommet montre que chaque arête du flot appartient à un chemin allant d'une place à une issue. Tout flot à valeur dans $\{0, 1\}$ traversant le graphe fournit donc un plan d'évacuation. Si les arêtes (u, v) et (v, u) sont utilisées, on les enlève du plan d'évacuation car elles constituent un cycle inutile.

Réciproquement, partant d'un plan d'évacuation, on sature toutes les arêtes des chemins du plan d'évacuation, ainsi que les arêtes reliant la source aux places et les issues au puits. Chaque chemin mène d'une place à une issue ; et la conservation du flot entre la source et le puits montre que l'on construit bien un chemin allant d'une place à une issue, et les contraintes sur les sommets sont assurés par le fait que les chemins sont à sommets disjoints.

On a donc bien réduit la recherche du plan d'évacuation à la recherche d'un flot entier dans un graphe avec contraintes aux sommets.

2. On construit un nouveau graphe en remplaçant tout sommet u distinct de la source et du puits par une paire de sommets u_1, u_2 reliés par une arête de capacité unitaire allant du sommet u_1 qui reçoit toutes les arêtes entrantes vers le sommet u_2 ayant toutes les arêtes sortantes du sommet u. Cette construction limite automatiquement le flot entrant dans un sommet à une valeur unitaire.

3. Il suffit d'appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson au graphe ainsi construit. Le nombre d'arêtes de ce graphe est $O(m+n)$, le nombre de sommets $O(n)$. La complexité est $O(m + n)|f^*|$, où $|f^*|$ est la valeur du flot maximal, ici $O(n)$.

Exercice 2 :

1. On considère (x_0) comme la source et (y_0) comme le puits du réseau, en ajoutant un poids unitaire sur chaque arête. L'algorithme de Ford-Fulkerson garantit de trouver un flot à valeur entière et donc à valeur dans $\{0, 1\}$. On considère alors le recouvrement par des chemins obtenu en gardant les arêtes (i, j) pour lesquelles l'arête (x_i, y_j) de E est saturée. Noter que cela ne peut être le cas que pour au plus une arête issue de x_i et pour au plus une arête issue de y_j, ce qui montre que chaque sommet a au plus une arête entrante et une arête sortante.

La valeur du flot maximal est alors égale au nombre d'arêtes du recouvrement par chemins ainsi construit en considérant le flot traversant la coupe $\{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}, \{y_i\}_{1\leq i\leq n}\}$. Comme chaque chemin a une arête de moins que son nombre de sommets (le graphe ne contient pas de cycle), le flot maximal vaut le nombre de sommets du recouvrement moins le nombre de chemins.

2. L'algorithme ne fonctionne pas sur les graphes orientés contenant des circuits car l'ensemble C peut contenir des circuits et la remarque concernant le nombre d'arêtes dans un chemin ne peut plus s'appliquer. Enfin, il n'existe pas d'algorithme en temps polynomial pour savoir si un graphe admet un chemin hamiltonien. (Si l'algorithme précédent fonctionnait, il suffirait de vérifier si le flot maximal vaut n le nombre de

sommets moins un.)

Exercice 3 : Algorithme pour déconnecter un graphe ou trouver une coupe minimal.

On sait qu'un algorithme de flot maximal donne un algorithme pour trouver une coupe qui sépare s et t. Mais peut-on appliquer cet algorithme pour résoudre le problème de trouver une coupe minimal. Il se peut que la coupe minimal qui sépare s et t ne soit pas pas la coupe minimale du graphe. L'idée est alors d'appliquer $(n-1)$ fois l'algorithme de flot maximal en faisant varier t parmi les $n-1$ sommets autre que s. On termine en prenant le minimum de tous ces flots. C'est effectivement la coupe minimale car s est forcément dans une des deux parties de la partition.

Il est à noter que réciproquement, on ne connaît pas de méthode permettant de calculer un flot maximal à partir d'un algorithme qui calcule une coupe minimal.

2.1 Couplage maximal

Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes $M \subset E$, tel que pour tous les sommets $v \in V$, au plus une arête de M est incidente à v. On dit alors que le sommet v est couvert. Un *couplage maximal* est un couplage de cardinalité maximum, c'est-à-dire un couplage M tel que pour tout couplage M', $|M| \geq |M'|$. Un couplage M est maximum, s'il n'existe pas de couplage M' tel que $M \subsetneq M'$.

Il est facile de voir que dans le graphe suivant il existe un couplage maximum n'est pas maximal. Soit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{(1, 3), (2, 4), (2, 3)\}$. Le couplage $M = \{(2, 3)\}$ est un couplage maximum, mais n'est pas maximal.

À partir du graphe biparti G, on va construire le réseau suivant : on rajoute une source s et un puits t et des arcs de valeur unitaire entre s et tous les sommets de L, entre tous les sommets de R et t, et sur toutes les arêtes du graphe de départ.

Théorème : *Soit $G = (L \cup R, E)$ un graphe biparti et $G' = (L \cup R \cup \{s, t\}, E')$ le réseau défini précédemment. Si M est un couplage de G, alors il existe un flot à valeur entières f dans G', avec $|f| = |M|$. Inversement, si f est un flot à valeurs entières de G', alors il existe un couplage M dans G de cardinalité $|M| = |f|$.*

Preuve. Si dans un réseau les capacités des arêtes sont des entiers, alors le flot maximal est à valeurs entières. En effet, Edmonds-Karp par exemple va calculer un flot en utilisant un chemin améliorant de capacité entière. Par conséquent, le réseau résiduel sera lui aussi à capacité entière.

Supposons qu'il existe dans G, un couplage M. Alors, on peut définir un flot dans G' en transportant un flot unitaire sur les arêtes de G et un flot unitaire entre s et tous les sommets couverts dans L et un flot unitaire entre les sommets couverts de R et t. Il est facile de voir que ceci définit bien un flot (anti-symétrie, conservation du flot en chaque sommet différent de s et t, et contrainte de capacité.)

On va montrer la deuxième partie du théorème. Il convient ensuite de remarquer qu'à tout sommet de L arrive qu'une seule arête de capacité unitaire. Ainsi, par conservation du flot et comme le flot est à valeur unitaire, au plus une arête peut transporter un flot de valeur unitaire. De même, comme le flot sortant d'un sommet de R est unitaire, au plus une arête qui transporte un flot unitaire peut arriver en un sommet de R. En prenant les arêtes qui transportent un flot unitaire entre L et R, on obtient bien un couplage de G car une seul sommet de L est choisi et un seul sommet de R est choisi. Si le flot vaut $|f|$, alors la coupe entre L et R est de capacité $|f|$ et le couplage vaut aussi $|f|$.

Corollaire : *La cardinalité d'un couplage maximal M d'un graphe biparti est la valeur d'un flot maximal de G'.*

Preuve : D'après la seconde partie du théorème précédent, on a $|f^*| \leq |M^*|$, où f^* est le flot maximal et M^* est le couplage maximal, car à tout flot, on peut associer un couplage. Réciproquement, à tout couplage, on peut associer un flot, et donc $|M^*| \leq |f^*|$. Par conséquent, la cardinalité du couplage maximal est égale à celle du flot maximal.

En appliquant Ford-Fulkerson (FF), on a un algorithme en temps $O(n(m'+n')) = O(n(m+n))$ car dans le nombre d'arêtes du réseau G' est $m' = m + 2n$ si le graphe G a $2n$ sommets et m arêtes, le nombre de sommets est $n' = 2n + 2$ et $|f^*| \leq n$.

Remarque : Il est amusant de remarquer qu'ici, il vaut mieux utiliser la complexité de FF en $O((n'+m')|f^*|)$ avec $|f^*| \leq n$ plutôt que la complexité de Edmonds-Karp qui donnerait $O(n'm'^2)$!!! *Remarque :* Il est possible de calculer un couplage maximal en temps $O(\sqrt{n}m)$.

Exercice 4 : Théorème de Hall.

On veut montrer que dans un graphe biparti $G = (L \cup R, E)$ avec $|L| = |R| = n$, alors il existe un couplage parfait dans G si et seulement si pour tout sous-ensemble $S \subset L$, $|S| \leq |V(S)|$ où

$$V(X) = \{y \in R : (x, y) \in E \text{ pour un certain } x \in X\}.$$

Un *couplage parfait* est un couplage tel que tous les sommets sont couverts.

Preuve. Il est facile de voir que s'il existe un couplage parfait alors pour tout sous-ensemble $S \subset L$, $|S| \leq |V(S)|$ car le couplage donne au moins l'égalité.

Réciproquement, supposons que pour tout sous-ensemble $S \subset L$, $|S| \leq |V(S)|$. On peut faire la preuve par récurrence sur la taille de L, mais on va réutiliser le résultat sur les couplages maximaux dans un graphe. On veut montrer qu'il existe un couplage maximal de taille n. Pour ce faire, on va montrer que la coupe minimale du réseau G' est au moins n, et donc le flot maximal sera lui-aussi au moins n.

Il existe deux coupes de valeur n en prenant s d'un côté et tous les autres sommets d'autre part. De même en isolant t et les autres sommets. La coupe $\{s \cup L, t \cup R\}$ est de valeur supérieure à n car pour $S = L$, $|V(L)| \geq |L| = n$. Soit C une coupe qui prend certains sommets de L et s d'une part et tous les autres d'une part. Soit $C_L = C \cap L$. La coupe vaut alors $|L \setminus C_L| + |V(C_L)|$ que l'on peut minorer par $|L| - |C_L| + |C_L| = n$. Enfin, soit C une coupe qui prend s, certains sommets de L et certains sommets de R. Supposons que $|C_L| \leq |C_R|$, où $C_R = C \cap R$. Alors en regardant uniquement les arêtes de C qui partent de s vers $L \setminus C_L$ et celles de C_R vers t, la valeur de C est supérieure à $|L \setminus C_L| + |C_R| = |L| - |C_L| + |C_R| \geq n$. Supposons maintenant que $|C_L| > |C_R|$. Alors $|V(C_L)| \leq |C_L| > |C_R|$. On peut alors rajouter dans la coupe les arêtes $|V(C_L)| - |C_R|$ à la valeur de la coupe précédente. Ainsi, on obtient $|L \setminus C_L| + |C_R| + |V(C_L)| - |C_R| = |L| - |C_L| + |C_R| + |V(C_L)| - |C_R| \geq |L| = n$ car $|V(C_L)| \geq |C_L|$.

Exercice 5 :

Preuve. On suppose $d \geq 1$. $|E| = \sum_{u \in L} deg(u) = d|L|$ et $|E| = \sum_{u \in R} deg(u) = d|R|$ et comme $d \neq 0$, $|L| = |R|$. Soit $n = |L|$.

Pour montrer qu'il existe un couplage maximal de taille n dans G, on va montrer qu'il existe une coupe minimale de capacité n dans le réseau G' qui a des capacités infinie pour les arêtes du graphe de départ. On voit que si on prend G', on a le même résultat que précédemment, à savoir qu'un flot maximal dans G' correspond à un couplage maximal de G. Ce qui est important est les arêtes de capacité unitaire entre s et les sommets de L et entre les sommets de R et t.

Afin de prouver avec la même technique que précédemment, on va montrer que si C est une coupe alors, $|C_L| \leq |C_R|$. Puisque les arêtes entre L et R sont de capacité infinie et entière, si $u \in C_L$ avec $(u, v) \in E$, alors $v \in C_R$. Notons $E(X, Y)$ l'ensemble des arêtes entre les sommets de X et ceux de Y. L'ensemble $E(C_L, C_R)$ contient toutes les $d|C_L|$ arêtes qui partent de C_L. De même, $|E(L, C_R)| = d|C_R|$ car il contient toutes les arêtes qui partent de C_R. Par conséquent, $|E(L, C_R)| \geq |E(C_L, C_R)| \geq d|C_L|$ et donc, $|C_R| \geq |C_L|$. Ainsi, la valeur d'une coupe qui contient des sommets de L et de R est $|L \setminus C_L| + |C_R| = n - |C_L| + |C_R| \geq n$.