Courbure d'espaces de formes

Jean Feydy   jean.feydy@ens.fr

Qu'est-ce qu'une forme ? Comment écrire mathématiquement qu'une baleine ressemble plus à un merlu qu'à un labrador (quoique...) ? Pour répondre à cette question, qui est aujourd'hui d'un intérêt crucial en vision par ordinateur et en imagerie médicale, une idée féconde consiste à munir des espaces de courbes ou de surfaces (vues à reparamétrisation près) d'une structure métrique convenable, où deux objets "semblables" seraient proches.
Comment y parvenir ? Et quelles seront alors les propriétés des espaces construits ?

Étude théorique. Dans un premier temps, on présentera les concepts élémentaires de géométrie riemannienne dans le cadre simple des nuages de points – et non des variétés générales – ce qui permet d'évacuer les difficultés techniques liées aux changements de cartes ; on définira successivement métriques infinitésimales, trajectoires géodésiques, distances induites et courbures. Assez comparable à celle du plan hyperbolique de Poincaré, notre étude théorique aboutira alors sur deux résultats phares :

— la **caractérisation hamiltonienne des géodésiques**, reformulation géométrique des principes fondamentaux de mécanique analytique qui donne "la bonne équation" pour penser et calculer des trajectoires géodésiques.

— le **principe de réduction**, qui lie les trajectoires dans l'espace des nuages de points aux géodésiques dans une variété de difféomorphismes de l'espace ambiant.

Travail expérimental. Ce mémoire sera l'occasion de découvrir une théorie mathématique élégante **avec de vraies applications pratiques**. En complément de l'analyse théorique présentée plus haut, je vous proposerai donc d'explorer, avec `python`, les propriétés géométriques des espaces ainsi développés. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux propriétés des "triangles géodésiques" entre courbes et surfaces anatomiques (scans IRM de cerveaux...) afin de quantifier les propriétés de courbure prédites par la théorie. Ce sera, pour vous, l'occasion de découvrir les outils logiciels récents – `PyTorch`, `Paraview` – qui permettent aux mathématiciens d'expérimenter avec leurs modèles continus "sans se prendre la tête".

Opportunités de stage : Ce mémoire peut être suivi d'un stage de découverte du monde de la recherche pendant l'été, en France ou à l'étranger. Selon vos affinités, nous pourrons notamment envisager l'équipe Inria Aramis (Paris 13$^{\text{e}}$), l'équipe Inria Asclepios (Sophia Antipolis), le Center for Imaging Science de la Johns Hopkins University (Baltimore) ou le département de mathématiques de l'Imperial College (Londres).

Références : Notre première référence sera le manuel écrit sous ma direction, en 2016–2017, par les élèves du groupe de lecture *Introduction à la géométrie riemannienne par l'étude des espaces de formes* :

`www.math.ens.fr/~feydy/Teaching/geometrie_riemannienne_espaces_de_formes.pdf`.

Celui-ci présente le sujet d'une manière adaptée aux élèves du DMA, en se reposant sur une sélection d'articles récents que nous pourrons ensuite étudier.