Reconnaissance de polyèdres digitaux

Proposition de stage
Ecole Normale Supérieure

30 janvier 2016

Encadrant: Yan Gerard
Laboratoire d'accueil: LIMOS
Equipe: G4
Lieu: France/Clermont-Fd
Téléphone: 06.11.12.34.65
Email: `yan.gerard@udamail.fr`

Mots clés : Géométrie digitale, Géométrie des nombres, Géométrie algorithmique, Polyèdres et polytopes, Convexité.

Cadre : Laboratoire LIMOS

Le stage proposé se déroulera à Clermont-Fd dans les locaux du laboratoire LIMOS (Laboratoire d' Informatique, de Modélisation et d' Optimisation des Systèmes), unité mixte de recherches UMR 6158 Université Blaise Pascal/CNRS. Le thème de recherche G4 (Géométrie, imaGes, alGorithmique et apprentissaGe) réunit plusieurs permanents mathématiciens et informaticiens - G. Bonnet-Loosli, V. Barra, G. Da Fonseca, J-M. Favreau, R. Malgouyres, C. Samir, L. Provot et Y. Gerard (X92) maître de conférences et encadrant du stage. C'est une équipe en émergence autour de différentes problématiques relevant de la géométrie digitale, l'informatique graphique, la géométrie algorithmique ou l'apprentissage.

Sujet de stage

Les polyèdres [7] sont un sujet de recherche important dans de très nombreux domaines de recherche. En recherche opérationnelle ou programmation linéaire entière, le problème consiste à trouver une solution entière à un système de contraintes linéaires réelles, autrement dit à trouver un point entier dans un polyèdre. Cette question peut être résolue en temps polynomial (à dimension fixée) [3]. Le problème sur lequel nous nous proposons de travailler est le problème inverse de la programmation entière.

— *Input* : Un entier n et un ensemble fini $S \subset \mathbb{Z}^d$ de points entiers.
— *Output* : Trouver un polyèdre P à n faces tel que $P \cap \mathbb{Z}^d = S$.

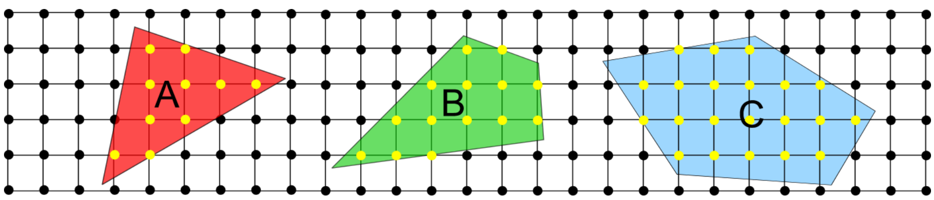

Figure 1 – Un polyèdre digital est l'intersection d'un polyèdre avec $\mathbb{Z}^d$. Les parties A, B et C de $\mathbb{Z}^2$ sont respectivement un triangle, quadrangle et pentagone digital.

Ce problème est celui de la caractérisation d'une ensemble de points entiers par n inéquations linéaires ou encore de la reconnaissance d'un polyèdre "digital" à n faces. En dimension $d = 2$, il s'agit de reconnaître un triangle, quadrangle, etc...- et on peut lui trouver de nombreuses extensions : reconnaître un rectangle, un carré, un polyomino. Bien que la question soit très simple et naturelle, elle n'a été que très peu étudiée (un article a été accepté pour la conférence DGCI en avril 2016). Que ce soit en dimension 2, 3 ou d, il y a de très nombreuses questions :

— Etudier la complexité du problème en fonction de n et d ? (peut-on trouver un algorithme polynomial pour $d = 2$? pour $d = 3$, le problème est-il NP-difficile ?).
— Proposer et étudier des algorithmes de résolution.

— Etendre la question de la reconnaissance de polyèdres digitaux à des polyèdres réguliers.

Rien ne guarantit que ces questions soient faciles. Même si on n'en sait pas grand-chose (nous ferons bien sûr le tour de la question en début de stage), de très nombreux autres résultats sont susceptibles d'intervenir, par exemple ceux de géométrie algorithmique sur la séparation de deux ensembles de points par un polyèdre à n faces. Même s'il s'agit de séparer deux ensembles quelconques et non un ensemble de points entiers et son complémentaire, pour n=1 et en dimension fixée, la programmation linéaire résoud le problème de séparation polyèdrale en temps linéaire [4]. Pour $n = 2$ en dimension arbitrairement grande, c'est une classe de problèmes NP-complète [5], L'état de l'art sur le sujet qui nous intéresse est presque vide, mais contient de très nombreuses références dans les domaines connexe -géométrie des nombres [1, 6], géométrie algorithmique [2]. C'est potentiellement un sujet très riche qui n'en est qu'à ses prémisses.

Compétences demandées au stagiaire

De la curiosité scientifique, de la créativité et de l'imagination et pourquoi pas, un certain goût pour la géométrie. Le langage de programmation est laissé au choix (on pourra envisager d'utiliser la librairie Open Source C++ `DGtal`). Il s'agit d'un stage réellement à la frontière des mathématiques et de l'informatique, qui peut pencher d'un côté ou de l'autre. Son contenu peut varier en fonction des goûts et intérêts de l'étudiant pour la théorie ou la programmation. Notre objectif est de faire découvrir au stagiaire le monde de la recherche, de stimuler sa curiosité et sa créativité en lui soumettant un sujet très ouvert qu'il pourra étudier en toute liberté.

Références

[1] Alexander I. Barvinok. Lattice points and lattice polytopes. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition.*, pages 153–176. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[2] H. Edelsbrunner and F.P. Preparata. Minimum polygonal separation. *Information and Computation*, 77(3) :218–232, 1988.

[3] H. Lenstra. Integer programming with a fixed number of variables. *Mathematics of Operations Research*, 8 :538–548, 1983.

[4] Nimrod Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in r^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12(4) :759–776, 1983.

[5] Nimrod Megiddo. On the complexity of polyhedral separability. *Discrete and Computational Geometry*, 3(4) :325–337, 1988.

[6] Herbert E. Scarf. Integral polyhedra in three space. *Mathematics of Operations Research*, 10 :403–438, 1985.

[7] Gunter Ziegler. *Lectures on Polytopes.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.