Formules d'inclusion-exclusion et algorithmique

Éric Colin de Verdière, eric.colin.de.verdiere@ens.fr, http://www.di.ens.fr/~colin/
et
Xavier Goaoc, xavier.goaoc@u-pem.fr, http://monge.univ-mlv.fr/~goaoc/

Le sujet s'inscrit dans le domaine de la combinatoire, avec des liens forts en algorithmique (notamment des graphes) et des outils de topologie.

La formule d'inclusion-exclusion, dans sa version la plus basique, stipule que pour tous sous-ensembles $F_1, \ldots, F_n$ d'un ensemble F,

$$|F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n| = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} F_i|.$$

De façon assez surprenante, cette formule peut servir à résoudre exactement certains problèmes d'algorithmique des graphes, comme le calcul du nombre chromatique ou du nombre de couplages parfaits [BHK09]. Cela permet, par exemple, de déterminer si un graphe est 3-coloriable en temps $2^{O(n)} \cdot n$, ce qui n'est pas évident a priori. Sans entrer dans les détails, les éléments F_i sont (essentiellement) des sous-ensembles de sommets, le membre de gauche compte le nombre cherché, et chaque terme du membre de droite est calculable facilement.

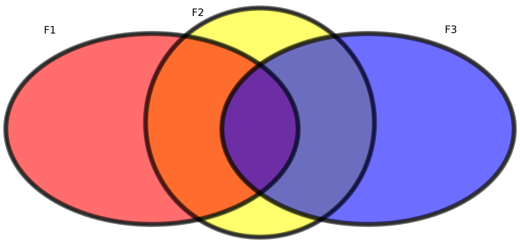

Figure 1 –

Cette formule est combinatoirement très jolie, mais complexe d'un point de vue algorithmique : Elle comporte $2^n - 1$ termes, ce qui est parfois rédhibitoire. Pour certaines familles F_i bien choisies, la formule peut se simplifier : Si les F_i sont comme sur la figure 1, on peut écrire

$$|F_1 \cup F_2 \cup F_3| = |F_1| + |F_2| + |F_3| - |F_1 \cap F_2| - |F_2 \cap F_3|.$$

Il s'agit là d'un phénomène général [GMP+15].

L'objet du mémoire est de proposer une introduction à ces questions de combinatoire et d'algorithmique en se familiarisant avec les techniques de [BHK09, GMP+15]. Selon les goûts de l'étudiant(e), le sujet pourra se prolonger vers des questions de topologie, de probabilité et comporter une composante expérimentale et de programmation.

Références

[BHK09] Andreas Björklund, Thore Husfeldt, and Mikko Koivisto. Set partitioning via inclusion-exclusion. *SIAM Journal on Computing*, 39(2) :546–563, 2009.

[GMP+15] Xavier Goaoc, Jiří Matoušek, Pavel Paták, Zuzana Safernová, and Martin Tancer. Simplifying inclusion-exclusion formulas. *Combinatorics, Probability and Computing*, 24(2) :438–456, 2015.