SUJET DE STAGE: CALCUL EFFICACE DU VOLUME D'ENSEMBLES SEMI-ALGÉBRIQUES

JEAN B. LASSERRE

1. Introduction

On s'intéresse au calcul du volume (n-dimensionnel de Lebesgue) vol($\mathbf{K}$) d'un ensemble semi-algébrique de base $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$ compact (mais non nécessairement convexe) défini par

$$\mathbf{K} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \, j = 1, \ldots, m\},$$

où les g_j's sont des polynômes de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Le calcul (même approché) de vol($\mathbf{K}$) est difficile même si $\mathbf{K}$ est convexe; cf. [1] et ses références. En [1] on a proposé une méthode originale[1] pour approximer vol($\mathbf{K}$) avec une précision arbitraire, en résolvant une *hiérarchie* de *programmes semidéfinis*[2]. L'idée est de formaliser ce problème comme une instance particulière du *Problème Généralisé des Moments* (PGM) (avec données polynomiales) pour lequel une méthodologie générale [3, 4] basée sur la résolution d'une *hiérarchie de relaxations convexes*, permet d'approcher arbitrairement près la value optimale du PGM.

2. Le sujet

Introduction. Avec $(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^\alpha$ désigne le monomial $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ et $\mathbb{N}^n_d = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq d\}$. L'ensemble $\mathbf{K}$ étant compact, on suppose que $\mathbf{K} \subset \mathbf{B}$ où $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$ est une "boite" (e.g. $[-1, 1]^n$ après un éventuel changement d'échelle). La méthodologie décrite en [1] pour approcher vol($\mathbf{K}$) consiste à calculer une approximation de plus en plus fine des moments $y_\alpha := \int_{\mathbf{K}} \mathbf{x}^\alpha d\mathbf{x}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, de la measure de Lebesgue sur $\mathbf{K}$, en résolvant le PGM

$$\rho = \sup_{\mu, \nu} \{ \int_{\mathbf{K}} d\mu : \quad \mu + \nu = \lambda; \quad \mathrm{supp}\, \mu \subset \mathbf{K}; \mathrm{supp}\, (\nu) \subset \mathbf{B}\}, \tag{2.1}$$

qui est un programme linéaire infini-dimensionnel où les inconnues sont les deux mesures μ, ν avec supports inclus dans $\mathbf{K}$ et $\mathbf{B}$ respectivement, et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{B}$. La solution optimale est évidemment $(\mu^*, \nu^*) = (\lambda_{\mathbf{K}}, \lambda_{\mathbf{B} \setminus \mathbf{K}})$ où $\lambda_{\mathbf{K}}$ est la restriction de λ sur $\mathbf{K}$, et la valeur optimale ρ est précisément vol($\mathbf{K}$).

[1] A notre connaissance la seule pour le calcul approché du volume d'un semi-algébrique non convexe, à l'exception bien sûr de la méthode brutale et naive de génération aléatoire de type Monte-Carlo.

[2] Un programme semidéfini est un problème d'optimisation (conique) convexe de dimension finie que l'on peut résoudre efficacement, i.e., en temps polynomial dans la taille du problème (pour une précision fixée à l'avance), par exemple par des méthodes de points intérreurs

On approxime ρ par une suite monotone non croissante $\rho_d \to \rho$, $d \to \infty$ où avec la notation $\mathbf{y} = (y_\alpha)$, $\mathbf{z} = (z_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_d$,

$$\rho_d = \sup_{\mathbf{y},\mathbf{z}} \{ \, y_0 : \; y_\alpha + z_\alpha \; = \underbrace{\int_{\mathbf{B}} \mathbf{x}^\alpha d\mathbf{x}}_{\text{connu}}; \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{N}^n_d; \; \mathbf{y} \in \Omega_d(\mathbf{K}); \; \mathbf{z} \in \Omega_d(\mathbf{B}) \, \} \tag{2.2}$$

où $\Omega_d(\mathbf{K})$ est un cône convexe qui approxime de l'extérieur et de plus en plus précisément quand $d \to \infty$, le cône convexe $\{\mathbf{y} = (y_\alpha) : \exists \, \mu \text{ s.t. } y_\alpha = \int_{\mathbf{K}} d\mu, \, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n_d\}$ (et similairement pour $\Omega_d(\mathbf{B})$). Des résultats de géométrie algébrique relativement récents permettent de définir de tels cônes convexes $\Omega_d(\mathbf{K})$ et $\Omega_d(\mathbf{B})$ par des contraintes de *semidéfinie positivité* de certaines matrices dont les entreés sont linéaires en $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$. Il en résulte que (2.2) est une problème d'optimisation convexe (un problème de programmation semidéfinie (SDP en anglais)) que l'on sait résoudre efficacement.

Le sujet. Comme $\rho_d \geq \rho$ pour tout d, on peut améliorer la convergence $\rho_d \to \rho$, $d \to \infty$, en rajoutant des contraintes sur $\mathbf{y}$ dans le problème (2.2) tout en gardant bien sûr un problème convexe à résoudre. Pour cela on utilisera la formule de Stokes

$$\int_{\mathbf{K}} \mathrm{Div}(Xf) \, d\mathbf{x} \; = \; \int_{\partial \mathbf{K}} \langle X, \vec{n}_{\mathbf{x}} \rangle d\sigma, \tag{2.3}$$

pour plusieurs choix du champ de vecteur X et de la fonction f. Par exemple, si f est un polynôme qui s'annule sur la frontière de $\mathbf{K}$ et X est polynomial alors (2.3) est une *contrainte linéaire* qui lie certains moments y_α de $\lambda_{\mathbf{K}}$, et que l'on peut donc ajouter dans les contraintes sur $\mathbf{y}$ de (2.2) pour obtenir une valeur de ρ_d plus petite. On veut donc analyser l'efficacité de cette procédure en la testant d'abord sur des exemples relativement simples en dimension $1, 2$ et 3.

Pré-requis et outils. Connaissance de base de Matlab; Pour résoudre (2.2) et sa variante définie dans le projet on utilisera le logiciel **GloptiPoly** (cf. [2]) (basé Matlab) qui permet la rśolution de (2.2) à partir d'une description de haut niveau.

Intérêt du stage. Ce stage permet: (1) de se former à la *hiérarchie Moments-Somme de Carrés*, un nouvel outil devenu central dans beaucoup de problèmes d'optimisation globale (notamment en optimisation combinatoire et pour la conjecture "Unique Games"), et (2) de voir comment mettre en oeuvre effectivement cette méthodologie pour résoudre effectivement le PGM à travers une instance particulière et non triviale en géométrie calculatoire

References

[1] **Henrion D., Lasserre J.B., Savorgnan C.** Approximate volume and integration for basic semialgebraic sets, *SIAM Review* **51**, pp. 722–743, 2009.

[2] **Henrion D., Lasserre J.B., Lofberg J.** Gloptipoly 3: moments, optimization and semidefinite programming, *Optim. Methods and Softwares* **24**, pp. 761–779, 2009

[3] **Lasserre J.B.** Global optimization with polynomials and the problem of moments, *SIAM J. Optimization* **11**, pp 796–817, 2001

[4] **Lasserre J.B.** *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*, Imperial College Press, 2010.

LAAS-CNRS and Institute of Mathematics, University of Toulouse, LAAS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cédex 4, France, Tel: +33561336415

E-mail address: lasserre@laas.fr