## Proposition de sujet de stage 1ère année

# Optimisation stochastique à grande échelle

Le problème d'optimisation convexe consiste à trouver un point $x^* \in G \subseteq \mathbf{R}^M$ tel que

$$(P) \quad f_0(x^*) = \min_{x \in G} f_0(x), \quad f_i(x^*) \leq 0, \quad j = 1, ..., m.$$

Ici $G \subseteq \mathbf{R}^M$ est un convexe fermé et $f_0, ..., f_m : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ sont des fonctions convexes. Un algorithme itératif de solution du problème (P) est un ensemble de règles de construction d'une suite de points de recherche $(x_i)$, $i = 0, ..., t$ pour obtenir une approximation $\bar{x}_t$ du minimiseur $x^*$.

L'optimisation convexe est un domaine en pleine effervescence. Les avancées théoriques majeures des 30 dernières années ont abouti à la conception de méthodes d'optimisation efficaces, capables de résoudre des problèmes de type (P) en très grande dimension (cf. [1]).

Dans le cadre d'optimisation stochastique, a chaque itération « $i$ » pour obtenir le point de recherche $x_{i+1} \in G$ on dispose seulement des observations *bruitées* de fonctions $f_i$, $f_j(x_i) + e^i_j$, et de leurs (sous-)gradients $f'_j(x_i) + w^i_j$ en $x_i \in G$. Les méthodes de type approximation stochastique sont communément utilisées pour obtenir une approximation de la solution $x^*$ dans ce contexte.

Les problèmes d'optimisation stochastique en très grande dimension émergent naturellement dans des nombreux domaines d'application, tels que estimation non paramétrique, classification, traitement du signal, gestion financière, etc. La résolution efficace de ce type de problèmes n'est possible qu'en exploitant de façon optimale la structure du problème. Les algorithmes dites « classiques » d'approximation stochastiques s'avèrent inadaptés dans ce cas [2].

Les méthodes d'approximation stochastique *abstraite* forment une classe d'algorithmes stochastiques différents, qui, grâce à leur flexibilité accrue, permettent, justement, la prise en compte optimale de la structure et de la géométrie du problème. Les premières méthodes de ce type ont étés proposées dans [3] par A. Nemirovski, D. Yudin. L'idée de ces méthodes est d'exploiter la structure duale du problème, en séparant la trajectoire du gradient dans l'espace « dual » de la trajectoire du minimiseur $\bar{x}_t$ dans l'espace « primal ».

L'objectif de ce projet est double : d'une part, il s'agit d'une étude théorique des propriétés de méthodes génériques de type approximation stochastique abstraite. D'autre part, on cherchera à appliquer ce type de méthodes à différents problèmes statistiques.


[1] A. Ben-Tal, A. Nemirovski. *Lectures on modern convex optimization. Analysis, algorithms, and engineering applications.* MPS/ SIAM Series on Optimization. SIAM, (2001).

[2] A. Juditsky, G. Lan, A. Nemirovski, A. Shapiro. Robust Stochastic Approximation approach to Stochastic Programming, *SIAM J. Optim.*, **19** 4, 1574-1609, (2009).

[3] A. Nemirovskij, D. Yudin. *Problem complexity and method efficiency in optimization.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons. (1983).



**Responsable :** A. IOUDITSKI.

Tél. direct : 04 76 63 59 69

e-mail : juditsky@imag.fr