

# Calibration et gestion des risques dans les modèles de taux par la programmation semidéfinie.

A. d'Aspremont

Travail réalisé sous la direction de Nicole El Karoui.

February 25, 2002

# 1 Motivations

Les problèmes de calibration et de gestion des risques d'un modèles de taux ont comme sous-jacents naturels un operateur de covariance. Les méthodes actuelles qui consistent à paramétrer fortement ou a substituer des données historiques sont instables et trop peu flexibles.

## 1.1 Origine du problème

- Dans le cadre de l'analyse de Heath, Jarrow & Morton (1992), on sait qu'un modèle de taux arbitré est entièrement paramétré par la donnée de la courbe des taux aujourd'hui et de leur fonction de covariance.
- Si on discrétise, le **paramètre naturel** de la calibration d'un modèle de taux est **une matrice semidéfinie positive**.
- Actuellement: la calibration est soit paramétrée par **un ou deux facteurs**, soit basée sur la **corrélation historique**.
- Les programmes de calibrations actuels sont donc **intrinsèquement instables**.
- Ces méthodes **n'exploitent pas toute la richesse des modèles** sous-jacents.
- De plus, ces approches ne fournissent pas de résultats sur la **sensibilité** de la solution à une variation des prix de marché. La technique la plus souvent utilisée est de **modifier** les données initiales et de **recalibrer** pour un certain nombre de scénarios précis. Cette technique, coûteuse numériquement, **amplifie l'instabilité** des résultats.

## 1.2 Principaux résultats

La clé de tous les résultats qui vont suivre se trouve dans le développement récent d’algorithmes de programmation linéaire sur l’espace des matrices semidéfinies, algorithmes dont la complexité (polynomiale) est comparable à celle des programmes linéaires classiques.

- Dans l’évaluation du prix d’une swaption, on peut **assimiler le taux swap à un panier de taux forwards**.
- Parce que **la volatilité des zéros coupons est faible** comparée à celle des forwards, on peut supposer que les **poids** dans ce panier sont **constants** et que le swap et les forwards sont **martingales sous une même mesure**.
- Le prix de ces options paniers peut ensuite être calculé (en première approximation) en utilisant la formule de Black-Scholes (**formule de marché** pour les Swaptions) avec une variance bien choisie.
- Cette **”variance de marché” est une forme linéaire** sur la matrice de covariance des forwards.
- Si l’on choisit d’optimiser un objectif linéaire en variance, le problème de la calibration peut donc se résoudre comme **un programme semidéfini**.
- Le **dual** de ce programme est un programme de couverture et **fourni la sensibilité** de la solution à une variation des prix de marchés

## 1.3 Littérature associée

- Les travaux de Nesterov & Nemirovskii (1994) et Vandenberghe & Boyd (1996) sur la programmation semidéfinie, Nesterov & Todd (1998) pour un traitement général de la complexité des programmes linéaires sur les cônes symétriques.
- Les résultats Rebonato (1998), Brace, Dun & Barton (1999) et Singleton & Umantsev (2001) sur l’évaluation des swaptions comme paniers de forwards. Rebonato (1999) sur la calibration du BGM par paramétrisation des facteurs.
- Les travaux parallèles de Brace & Womersley (2000) sur la calibration du BGM par programmation semidéfinie et l’impact du nombre de facteurs sur l’évaluation de la Mid-Atlantique.
- Les articles de Fournie, Lebuchoux & Touzi (1997) et Lebuchoux & Musiela (1999) sur le développement en petits bruits.

## 1.4 Plan de l'exposé

### 1.4.1 Première partie:

- Modèles de taux, notations.
- Approximations du prix de la Swaption comme prix d'une option sur un panier de forwards.
- Evaluation des options sur paniers dans un modèle de Black-Scholes en dimension  $d$ , approximation du prix par développement en petits bruits.

### 1.4.2 Deuxième partie:

- Le problème de calibration comme un programme semidéfini.
- Programme dual et gestion des risques.
- Minimisation du rang ou stabilité?

## 2 Première partie

### 2.1 Les modèles

On définit l'évolution de l'actif sans risque par  $\beta_s = \exp\left(\int_t^s r(u, 0)du\right)$  (1 euro placé à la date zéro au taux court) où  $r(u, 0)$  est le taux court spot à la date  $u$ . Dans l'analyse de Heath et al. (1992), et si on note  $B(s, T)$  le prix en  $s$  du zero-coupon de maturité  $T$

$$B(s, T) = E_s^{\mathbf{Q}} \left[ \exp\left(-\int_t^T r(u, 0)du\right) \right]$$

l'absence d'arbitrage entre les différents Z.C. impose:

$$\frac{B(s, T)}{\beta_s} = B(t, T) \exp\left(-\int_t^s \tilde{\sigma}(u, T-u)dW_u - \frac{1}{2} \int_t^s |\tilde{\sigma}(u, T-u)|^2 du\right)$$

où  $\tilde{\sigma} : \mathbf{R}_+^2 \mapsto \mathbf{R}_+^d$  est la fonction de volatilité des Z.C. et  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  est un B.M. de dimension  $d$  sous la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$ . On définit ensuite le taux forward LIBOR de maturité  $\delta$  (par ex. 3 mois) à la date  $t$  par:

$$1 + \delta L(t, \theta) = \exp\left(\int_\theta^{\theta+\delta} r(t, \nu)d\nu\right)$$

#### 2.1.1 Le modèle de marché sur les LIBOR (lognormal en taux)

Dans ce modèle, on suppose que le **taux** forward LIBOR a une volatilité lognormale:

$$dL(s, \theta) = (...)ds + L(s, \theta)\gamma(s, \theta)dW_s$$

avec  $\gamma : \mathbf{R}_+^2 \mapsto \mathbf{R}_+^d$  déterministe et si on impose  $\sigma(s, \theta) = 0, \forall \theta \in [0, \delta[$  comme dans Brace, Gatarek & Musiela (1997), on a spécifié la volatilité des Z.C. comme:

$$\tilde{\sigma}(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\lfloor \delta^{-1}\theta \rfloor} \frac{\delta L(s, \theta - k\delta)}{1 + \delta L(s, \theta - k\delta)} \gamma(s, \theta - k\delta)$$

#### 2.1.2 Le modèle affine (lognormal en prix)

Dans ce modèle, on suppose que les **prix des Z.C.** ont une dynamique lognormale et sont donnés par:

$$\frac{dB(s, T)}{B(s, T)} = r(s, 0)ds + \tilde{\sigma}(s, T-s)dW_s$$

où  $\tilde{\sigma}(s, T-s)$  est ici déterministe (on obtient une dynamique lognormale shiftée sur les forwards).

## 2.2 Instruments de base: les Swaptions

### 2.2.1 Taux swap

Le swap est le taux qui équilibre les PV d'une branche fixe et d'une branche variable. Il est défini par:

$$swap(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0^{floating}) - B(t, T_{n+1}^{floating})}{Level(t, T_0^{fixed}, T_n^{fixed})}$$

avec  $Level(t, T_0^{fixed}, T_n^{fixed}) = \sum_{i=1}^{n+1} coverage(T_{i-1}^{fixed}, T_i^{fixed})B(t, T_i^{fixed})$ . On peut encore écrire ce taux comme:

$$swap(t, T_0, T_n) = \sum_{i=0}^n \omega_i(t)K(t, T_i)$$

où

$$\omega_i(t) = \frac{coverage(T_i^{float}, T_{i+1}^{float})B(t, T_{i+1}^{float})}{Level(t, T_0^{fixed}, T_n^{fixed})} \text{ et } K(t, T) = L(t, T - t)$$

En pratique, les poids  $\omega_i(t)$  sont remarquablement stables.

### 2.2.2 Swaption (formule en taux)

Si on suppose que les taux suivent la dynamique du modèle de marché sur les taux LIBOR, on définit le prix de la Swaption comme une somme de Calls sur le taux swap prévalant à la date  $T$ :

$$Ps(t) = B(t, T)E_t^{Q^T} \left[ \sum_{i=i_T}^N \frac{\beta(T)\delta cvg(i, b)}{\beta(T_{i+1})} (swap(T, T, T_N) - k)^+ \right]$$

où  $Q^T$  est la probabilité forward en  $T$ . Si on définit une nouvelle probabilité martingale  $Q^{LVL}$  associée au forward swap:

$$\frac{dQ^{LVL}}{dQ^T} \Big|_t = B(t, T)\beta(T) \sum_{i=1}^N \frac{\delta cvg(i, b)\beta^{-1}(T_{i+1})}{Level(t, T, T_N)}$$

on peut réécrire le prix de la Swaption comme une option sur le taux swap:

$$Ps(t) = Level(t, T, T_N)E_t^{Q^{LVL}} [(swap(T, T, T_N) - k)^+]$$

ou encore comme une option sur un panier de forwards:

$$Ps(t) = Level(t, T, T_N)E_t^{Q^{LVL}} \left[ \left( \sum_{i=0}^n \omega_i(t)K(t, T_i) - k \right)^+ \right]$$

Dans le modèle de marché sur les LIBOR, on constate que la stabilité empirique est bien décrite par le modèle. En effet, on a:

$$d\text{swap}(s, T, T_N) = \sum_{i=i_T}^N \omega_i(s) K(s, T_i) (\gamma(s, T_i - s) + \eta(s, T_i)) dW_s^{LVL}$$

où la contribution des poids est donnée par:

$$\eta(s, T_i) = \left( \sum_{k=i_T}^N \omega_k(s) (\tilde{\sigma}(s, T_i - s) - \tilde{\sigma}(s, T_k - s)) \right)$$

où  $\tilde{\sigma}(s, T_k - s)$  est la volatilité des Z.C:

$$\tilde{\sigma}(s, T_i) = \sum_{k=1}^{\lfloor \delta^{-1} T_i \rfloor} \frac{\delta K(s, T_k)}{1 + \delta K(s, T_k)} \gamma(s, T_k - s)$$

D'autre part le changement de probabilité se traduit en termes de drift par:

$$dW_s^{LVL} = dW_s^T + \sum_{i=i_T}^N \left( \omega_i(s) \sum_{j=1}^i \frac{\delta K(s, T_j)}{1 + \delta K(s, T_j)} \gamma(s, T_j - s) \right) ds$$

En première approximation, avec en pratique:

$$\delta K(s, T_j) \simeq 1\%$$

on peut considérer que la contribution des poids dans la volatilité du swap peut être négligée face à celle des forwards. On peut également négliger le drift introduit par le passage de la probabilité forward à la probabilité forward swap. La swaption dans le modèle lognormal en taux peut donc être évaluée comme une **option sur un panier de taux lognormaux**.

### 2.2.3 Swaption (formule en prix)

On peut aussi écrire le prix de la Swaption de strike  $k$  et de maturité  $T$  comme celui d'un put sur un panier de Z.C.:

$$P_S(t) = B(t, T) E_t^{Q^T} \left[ \left( 1 - B(t, T_{N+1}) - k \delta \sum_{i=i_T}^N B(t, T_i) \right)^+ \right]$$

les coefficients dans le panier sont ici constants. Dans le modèle lognormal en prix, la Swaption peut donc ici aussi être évaluée comme une **option sur un panier d'actifs lognormaux**.

## 2.3 Evaluation des options sur un panier d'actifs

### 2.3.1 La dynamique du forward

Dans les deux types de modèles qui précèdent, on écrit le prix de la Swaption comme celui d'une option sur un panier d'actifs lognormaux. On va donc chercher à approximer ce prix dans les cas général où ces  $n$  actifs ont une corrélation de dimension a priori égale à  $n$ , en utilisant les méthodes de développement en petits détaillées par Fournie et al. (1997) et Lebuchoux & Musiela (1999). On se place directement dans le marché forward où la dynamique des forwards sous-jacents (prix ou taux) est donnée par:

$$dF_s^i = F_s^i \sigma_s^i dW_s$$

où  $W_t$  un  $\mathbf{Q}^T$ -Brownien  $d$ -dimensionnel et  $\sigma_s = (\sigma_s^i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbf{R}^{n \times d}$  est la matrice de volatilité. Dans toute la suite on notera  $\Gamma_s \in \mathbf{R}^{n \times n}$  la matrice de covariance correspondante. On cherche à calculer le prix d'un Call sur panier dont le payoff à maturité est donné par:

$$h(F_T^\omega) = \left( \sum_{i=1}^n \omega_i F_T^i - k \right)^+ \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Pour ce faire on commence par écrire la dynamique du sous-jacent  $F_s^\omega$  sous forme lognormale:

$$dF_s^\omega = F_s^\omega \left( \sum_{i=1}^n \widehat{\omega}_{i,s} \sigma_s^i \right) dW_s$$

avec

$$\widehat{\omega}_{i,s} = \frac{\omega_i F_s^i}{\sum_{i=1}^n \omega_i F_s^i}$$

La dynamique de ces poids est donc donnée par

$$\frac{d\widehat{\omega}_{i,s}}{\widehat{\omega}_{i,s}} = \left( \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s} (\sigma_s^i - \sigma_s^j) \right) \left( dW_s + \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s} \sigma_s^j ds \right)$$

et on vérifie très naturellement que si les volatilités  $\sigma_s^i$  sont toutes identiques, la dynamique du forward  $F_s^\omega$  est exactement lognormale avec comme volatilité  $\sigma_s^\omega$ , on définit donc la volatilité résiduelle de chaque actif par rapport à cette volatilité centrale comme:

$$\tilde{\sigma}_s^i = \sigma_s^i - \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,t} \sigma_s^j \quad \text{avec} \quad \sigma_s^\omega = \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{i,t} \sigma_s^j$$

### 2.3.2 Développement en petits bruits

En pratique, la volatilité résiduelle et les moyennes  $\sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s} \tilde{\sigma}_s^j$  sont supposées petites et on va donc développer la dynamique du forward en remplaçant  $\sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s}^\varepsilon \tilde{\sigma}_s^j$  par  $\varepsilon \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s}^\varepsilon \tilde{\sigma}_s^j$  pour un  $\varepsilon > 0$  petit, pour écrire:

$$\begin{cases} dF_s^{\omega,\varepsilon} = F_s^{\omega,\varepsilon} \left( \sigma_s^\omega + \varepsilon \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s} \tilde{\sigma}_s^j \right) dW_s \\ d\widehat{\omega}_{i,s}^\varepsilon = \widehat{\omega}_{i,s}^\varepsilon \left( \tilde{\sigma}_s^i - \varepsilon \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s}^\varepsilon \tilde{\sigma}_s^j \right) \left( dW_s + \sigma_s^\omega ds + \varepsilon \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,s} \tilde{\sigma}_s^j ds \right) \end{cases}$$

Comme dans Fournie et al. (1997) et Lebuchoux & Musiela (1999) on cherche donc à évaluer:

$$C^\varepsilon = E \left[ (F_T^{\omega,\varepsilon} - k)^+ \mid (F_t^\omega, \widehat{\omega}_t) \right]$$

en l'approximant par son développement de Taylor autour de  $\varepsilon = 0$ :

$$C^\varepsilon = C^0 + C^{(1)}\varepsilon + C^{(2)}\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

### 2.3.3 Terme d'ordre zéro

Le terme d'ordre zéro se calcule directement comme la solution de l'E.D.P. limite:

$$\begin{cases} \frac{\partial C^0}{\partial s} + \|\sigma_s^\omega\|^2 \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 C^0}{\partial x^2} = 0 \\ C^0 = (x - K)^+ \text{ for } s = T \end{cases}$$

et on peut donc obtenir  $C^0$  par la formule de Black & Scholes (1973) avec comme variance  $\|\sigma_s^\omega\|^2$ :

$$C^0 = BS(T, F_t^\omega, V_T) = F_t^\omega N(h(V_T)) - \kappa N\left(h(V_T) - \sqrt{V_T}\right)$$

avec

$$h(V_T) = \frac{\left( \ln\left(\frac{F_t^\omega}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}V_T \right)}{\sqrt{V_T}} \text{ et } V_T = \int_t^T \|\sigma_s^\omega\|^2 ds$$

### 2.3.4 Terme d'ordre un

On peut ensuite s'intéresser à l'E.D.P. vérifiée par  $\partial C^\varepsilon / \partial \varepsilon$ :

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon C^\varepsilon = 0 \\ C^\varepsilon = (x - k)^+ \text{ en } s = T \end{cases}$$

où l'on a noté:

$$\begin{aligned} L_0^\varepsilon &= \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial s} + \left\| \sigma_s^\omega + \varepsilon \sum_{j=1}^n y_j \tilde{\sigma}_s^j \right\|^2 \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial x^2} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left( \langle \tilde{\sigma}_s^j, \sigma_s^\omega \rangle + \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \langle \tilde{\sigma}_s^j - \sigma_s^\omega, \tilde{\sigma}_s^k \rangle - \varepsilon^2 \left\| \sum_{k=1}^n y_k \tilde{\sigma}_s^k \right\|^2 \right) x y_j \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial x \partial y_j} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\| \tilde{\sigma}_s^j - \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \tilde{\sigma}_s^k \right\|^2 \frac{y_j^2}{2} \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial y_j^2} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left( \langle \tilde{\sigma}_s^j, \sigma_s^\omega \rangle + \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \langle \tilde{\sigma}_s^j - \sigma_s^\omega, \tilde{\sigma}_s^k \rangle - \varepsilon^2 \left\| \sum_{k=1}^n y_k \tilde{\sigma}_s^k \right\|^2 \right) y_j \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial y_j} \end{aligned}$$

on peut passer à la limite en  $\varepsilon = 0$  (en s'accordant comme dans Fournie et al. (1997) un peu de liberté avec les conditions de régularité), ce qui donne:

$$\begin{cases} L_0^0 C^{(1)} + \left( \sum_{j=1}^n y_j \langle \tilde{\sigma}_s^j, \sigma_s^\omega \rangle \right) x^2 \frac{\partial^2 C^0}{\partial x^2} = 0 \\ C^\varepsilon = 0 \text{ en } s = T \end{cases}$$

Ceci permet de calculer  $C^{(1)}$  en utilisant la représentation de Feynman-Kac:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \hat{\omega}_{j,t} \langle \tilde{\sigma}_{j,t}^j, \sigma_s^\omega \rangle \exp \left( \int_t^s -\frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_u^j - \sigma_u^\omega\|^2 du \right) \\ E \left[ \frac{\exp \left( \int_t^s (\sigma_u^\omega + \tilde{\sigma}_u^j) dW_u \right)}{\sqrt{V_{s,T}}} n \left( \frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \sigma_u^\omega dW_u - \frac{1}{2} V_{t,s} + \frac{1}{2} V_{s,T}}{\sqrt{V_{s,T}}} \right) \right] ds \end{aligned}$$

pour obtenir:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \hat{\omega}_{j,t} \frac{\langle \tilde{\sigma}_{j,t}^j, \sigma_s^\omega \rangle}{\sqrt{(V_{t,s} + V_{s,T})}} \exp \left( 2 \int_t^s \langle \tilde{\sigma}_u^j, \sigma_u^\omega \rangle du \right) \\ &n \left( \frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \langle \tilde{\sigma}_u^j, \sigma_u^\omega \rangle du + \frac{1}{2} V_{t,T}}{\sqrt{(V_{t,s} + V_{s,T})}} \right) ds \end{aligned}$$

### 2.3.5 Calcul du prix de l'option sur panier

En résumé on peut donc obtenir une formule approximant le prix de l'option sur panier:

$$E_t [(F_T^\omega - k)^+] = BS(T, F_t^\omega, V_T) + C^{(1)}$$

où

$$V_T = \int_t^T \|\sigma_s^\omega\|^2 ds$$

et

$$C^{(1)} = F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \hat{\omega}_{j,t} \frac{\langle \tilde{\sigma}_s^j, \sigma_s^\omega \rangle}{\sqrt{(V_{t,s} + V_{s,T})}} \exp\left(2 \int_t^s \langle \tilde{\sigma}_u^j, \sigma_u^\omega \rangle du\right) n \left( \frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \langle \tilde{\sigma}_u^j, \sigma_u^\omega \rangle du + \frac{1}{2} V_{t,T}}{\sqrt{(V_{t,s} + V_{s,T})}} \right) ds$$

### 2.3.6 Application aux Swaptions

Dans le cas de la Swaption, la formule à l'ordre zéro s'écrit:

$$Level(t, T, T_N) \left( swap(t, T, T_N) N(h) - \kappa N(h - \sqrt{V_T}) \right)$$

avec

$$h = \frac{\left( \ln \left( \frac{swap(t, T, T_N)}{\kappa} \right) + \frac{1}{2} V_T \right)}{\sqrt{V_T}}$$

et où

$$V_T = \int_t^T \left\| \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i(t) \gamma(s, T_i - s) \right\|^2 ds$$

avec

$$\hat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \frac{K(t, T_i)}{swap(t, T, T_N)}$$

### 2.3.7 Précision de la formule sur les paniers simples

On peut étudier la précision de cette approximation en comparant avec un Monte-Carlo.

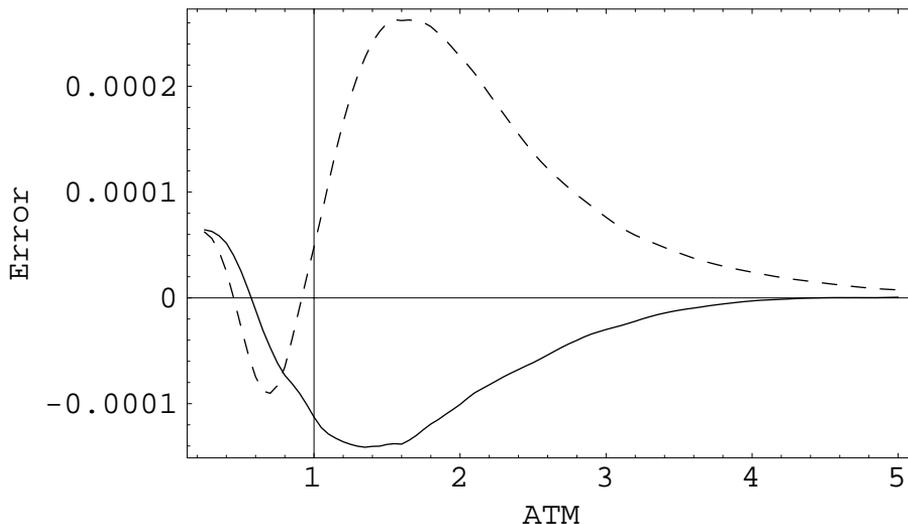


Figure 1: Erreur à l'ordre zéro (dashed) et l'ordre un (continu).

Les paramètres sont ici  $F_0^i = \{0.7, 0.5, 0.4, 0.4, 0.4\}$ ,  $\omega_i = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}$ ,  $T = 5$  ans, la matrice de covariance est donnée par:

$$\frac{11}{100} \begin{pmatrix} 0.64 & 0.59 & 0.32 & 0.12 & 0.06 \\ 0.59 & 1 & 0.67 & 0.28 & 0.13 \\ 0.32 & 0.67 & 0.64 & 0.29 & 0.14 \\ 0.12 & 0.28 & 0.29 & 0.36 & 0.11 \\ 0.06 & 0.13 & 0.14 & 0.11 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Ces valeurs répliquent les paramètres utilisés pour une Swaption (5 ans, 5ans). La matrice de covariance est issue de données historiques sur la covariance des FRA.

### 2.3.8 Précision de la formule dans le modèle lognormal sur LIBOR.

On peut aussi tester la qualité de l'approximation à l'ordre zéro dans le cadre du modèle de marché en comparant encore une fois avec les résultats obtenus par Monte-Carlo.

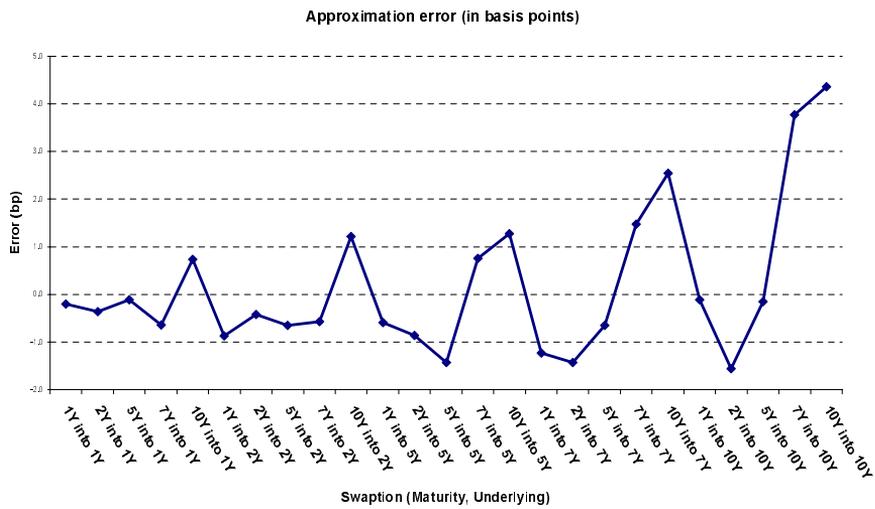


Figure 2: Erreur à l'ordre zéro sur le modèle lognormal en LIBOR (BGM). Données et code courtesy of BNP Paribas, Londres.

## 3 Deuxième partie: Calibration

### 3.1 Le programme de calibration

Comme on l'a vu dans la partie précédente, le prix de la swaption peut s'approximer par son prix de Black calculé avec une variance de marché bien choisie. Avec

$$\hat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \frac{K(t, T_i)}{\text{swap}(t, T, T_N)}$$

où les  $\omega_i(t)$  proviennent de la décomposition du Swap en panier de FRA, cette variance variance s'obtient comme:

$$V_T = \int_t^T \left\| \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i(t) \gamma(s, T_i - s) \right\|^2 ds$$

ou encore

$$V_T = \int_t^T \text{Tr}(\Omega_t \Gamma_s) ds$$

ou on a noté

$$\Omega_t = \hat{\omega}(t) \hat{\omega}(t)^\top = (\hat{\omega}_i(t) \hat{\omega}_j(t))_{i,j \in [1,N]} \succeq 0$$

Si on se donne une série de variances de marché  $\sigma_k^2 T_k$  correspondants à des Swaptions (ou Caplets) de poids  $\hat{\omega}_k$  et de maturité  $T_k$  et si on suppose que la covariance des LIBOR est constante par morceaux, on peut écrire le programme de calibration comme:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } X_i \\ &\text{avec } \sum_{i=t}^T \delta \text{Tr}(\Omega_{t,k} X_i) = \sigma_k^2 T_k \text{ où } k = 1, \dots, M \\ &X_i \succeq 0 \text{ pour } i = 0, \dots, T \end{aligned}$$

ou encore, sous-forme bloc-diagonale:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } X \\ &\text{avec } \text{Tr}(\Omega_k X) = \sigma_k^2 T_k \text{ où } k = 1, \dots, M \\ &X \succeq 0 \text{ pour } i = 0, \dots, T \end{aligned}$$

Le programme de calibration s'exprime donc comme un programme semidéfini (SDP) avec comme inconnue la matrice de covariance des FRA.

La résolution simultanée de ce programme et de son dual donne une **preuve de convergence** sous forme du gap de dualité, ou une preuve de non faisabilité si les prix sont incompatibles avec les hypothèses du modèle.

### 3.1.1 Un programme convexe

On peut comparer les deux types de paramétrage du problème de calibration sur un exemple simple. Dans les programmes paramétrés par facteurs de volatilité, si on cherche à résoudre le programme suivant:

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X \right) \\ \text{avec} \quad & \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X \right) = 1 \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

et qu'on le paramètre comme dans Rebonato (1999), on obtient:

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \cos^2(u) & \cos(v) \cos(u) \sin(u) \\ \cos(v) \cos(u) \sin(u) & \sin^2(u) \end{pmatrix}$$

on peut représenter la fonction  $\text{Tr}([1, -1; -1, 1]X(u, v))$ : En général, le programme

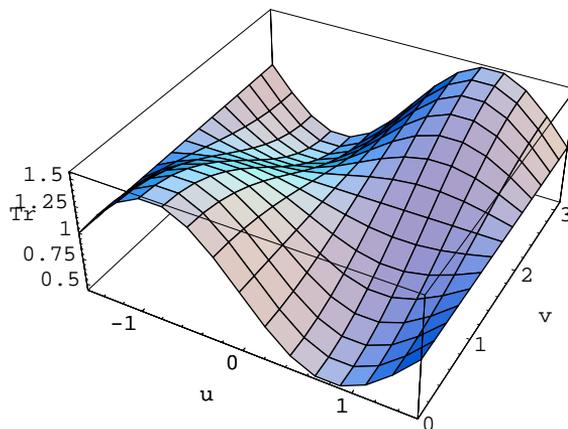


Figure 3: La fonction objectif paramétrée par facteurs.

paramétré par les facteurs revient à trouver une solution de rang minimal à un programme semidéfini. Ceci fait apparaître le programme de calibration comme NP-dur (et même NP-complet).

Par contre, la version SDP s'écrit comme l'optimisation d'une forme linéaire sur l'intersection du cône des matrices semidéfinies positives. Ce cône est représenté ici par

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \succeq 0 \iff \min_i \lambda_i(X) \geq 0$$

ce qui donne: et le domaine d'un programme semidéfini, l'intersection de ce cône

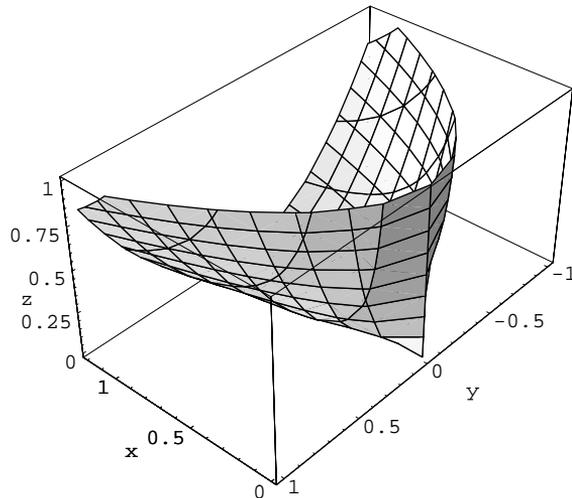


Figure 4: Le cône des matrices semidéfinies positives en dimension trois.

avec un plan (ici,  $x + z = 1$ ), peut donc être représentée comme:

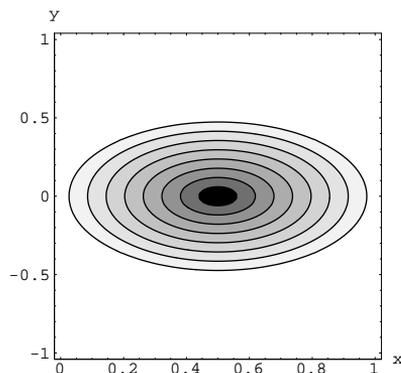


Figure 5: Domaine d'un programme semidéfini.

### 3.1.2 Objectifs

Comme l'ont souligné Nesterov & Nemirovskii (1994), la classe des objectifs représentables par SDP est très vaste. Elle inclut évidemment les objectifs linéaires mais aussi quadratiques par complément de Schur:

$$\|x\|^2 \leq t \text{ pour } x \in \mathbf{R}^n$$

peut encore s'écrire

$$\begin{pmatrix} tI & x^T \\ x & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

On peut également représenter la norme spectrale en termes d'inégalités matricielles et donc de SDP:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \|X - A\| \\ \text{pour} & Tr(X\Omega_{T_i}) = (\sigma_{market}^2)_i T_i \\ & X \succeq 0 \end{array}$$

devient:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & t \\ \text{pour} & Tr(X\Omega_{T_i}) = (\sigma_{market}^2)_i T_i \\ & X - A \preceq tId \\ & X - A \succeq -tId \\ & X \succeq 0 \text{ et } t \geq 0 \end{array}$$

### 3.1.3 Programme dual

Le dual du SDP de calibration est un programme avec objectif linéaire, où les contraintes sont données par une inégalité matricielle linéaire. Le cône des matrices semidéfinies positives est autoadjoint, et on peut former le Lagrangien

$$\begin{aligned} L(X, y) &= -Tr(CX) + \sum_{k=1}^M y_k (Tr(\Omega_k X) - \sigma_k^2 T_k) \\ &= Tr \left( \sum_{k=1}^M (y_k \Omega_k - C) X \right) - \sum_{k=1}^M y_k \sigma_k^2 T_k \end{aligned}$$

pour obtenir:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \sum_{k=1}^M y_k \sigma_k^2 T_k \\ \text{pour} & 0 \preceq \left( \sum_{k=1}^M y_k \Omega_k - C \right) \end{array}$$

### 3.1.4 Calcul des sensibilités

On peut maintenant utiliser les résultats de Todd & Yildirim (1999) pour calculer la sensibilité de la solution a un changement dans les conditions du marché. On note  $X^*$ ,  $y^*$  et

$$Z^* = \left( C - \sum_{k=1}^M y_k^* \Omega_k \right)$$

la solution du programme de calibration. On note encore pour  $P, Q, X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ :

$$(P \odot Q) X = \frac{1}{2} (PXQ^T + QXP^T)$$

on note encore

$$\begin{aligned} A : \mathbf{S}^N &\longrightarrow \mathbf{R}^M \\ X &\longmapsto AX := (Tr(A_i X))_{i=1, \dots, M} \end{aligned}$$

et son dual

$$\begin{aligned} A^* : \mathbf{R}^M &\longrightarrow \mathbf{S}^N \\ y &\longmapsto A^* y := \sum_{i=1}^M y_i \Omega_i \end{aligned}$$

On définit  $M = I$  (direction de recherche A.H.O.) ou  $M = Z^*$  (H.K.M.) et enfin les operateurs  $E = Z^* \odot M$ ,  $F = MX^* \odot I$  et leurs adjoints  $E^* = Z^* \odot M$  and  $F^* = X^* M \odot I$ .

On suppose que es données de marché  $\sigma_k^2 T_k$  on été modifiées dans une direction donnée par un veteur  $u \in \mathbf{R}^n$  petit, **on peut calculer directement la nouvelle solution** du programme de calibration:

$$\Delta X = E^{-1} F A^* \left[ (A E^{-1} F A^*)^{-1} u \right]$$

de plus, celle-ci est garantie valable si

$$\left\| (X^*)^{-\frac{1}{2}} \left( E^{-1} F A^* \left[ (A E^{-1} F A^*)^{-1} u \right] \right) (X^*)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq 1$$

On dispose donc d'une matrice donnée par

$$S = E^{-1} F A^* \left[ (A E^{-1} F A^*)^{-1} \right]$$

qui permet de **calculer directement la sensibilité de la solution à l'ensemble des scenarios de marché** possibles.

### 3.1.5 Bornes sur le prix

On peut placer en objectif une matrice correspondant au prix d'une autre Swaption.

$$\begin{aligned} & \text{maximiser} && \sigma_{\max}^2 T = Tr(\Omega_0 X) \\ & \text{s.t.} && Tr(\Omega_k X) = \sigma_k^2 T_k \text{ for } k = 1, \dots, M \\ & && X \succeq 0 \end{aligned}$$

Le dual de ce programme peut s'interpréter à la Avellaneda & Paras (1996) comme un programme de couverture, si on note  $BS_k(v)$ , le prix de Black Scholes de l'option  $k$  pour une variance  $v$ :

$$\inf_{\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^M \lambda_k C_k + \sup_{X \succeq 0} \left( BS_0(Tr(\Omega_0 X)) - \sum_{k=1}^M \lambda_k BS_k(Tr(\Omega_k X)) \right) \right\}$$

ou encore

$$\mathbf{Prix} = \text{Min} \{ \text{Valeur de la couverture} + \text{Max}(\text{PV du residu}) \}$$

Ce prix est donc calculé en introduisant dans la calibration les instruments de couverture et en choisissant les paramètres de calibration les plus conservateurs possibles. L'addition d'instruments dans la calibration améliore la diversification du risque (sous-additivité de l'opérateur  $\text{Max}(\text{PV du residu})$ )

Exemple de bornes sur les prix (6 Novembre 2000). On calibre en utilisant tous les caplets et les Swaptions suivantes: 5Y into 5Y, 5Y into 2Y, 5Y into 10Y, 2Y into 2Y, 2Y into 5Y, 7Y into 5Y, 10Y into 5Y, 10Y into 2Y, 10Y into 10Y, 7Y into 3Y, 4Y into 6Y, 17Y into 3Y.

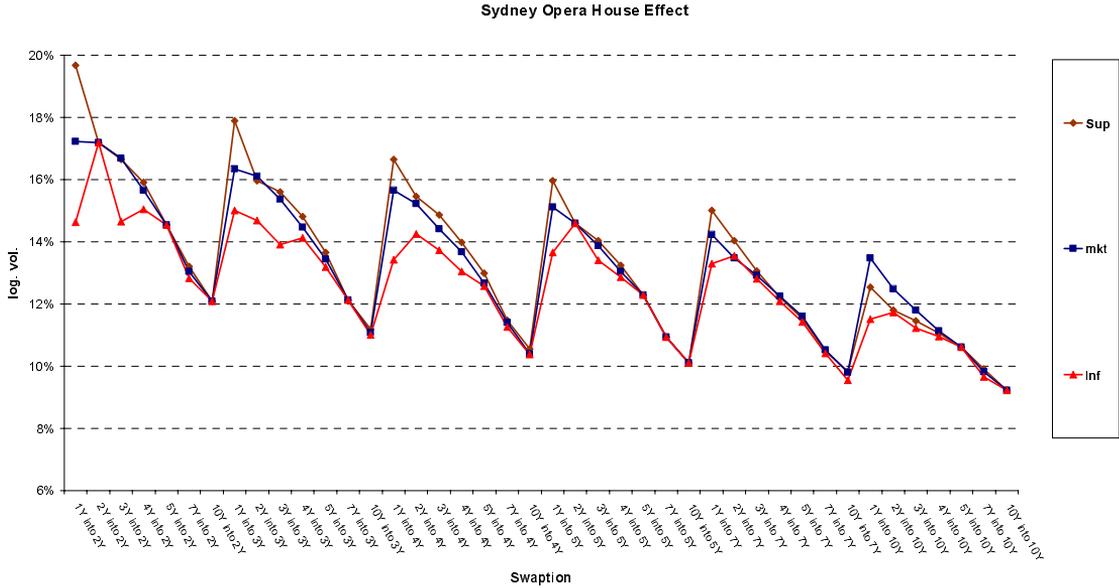


Figure 6: Bornes inf. et sup. sur le prix des Swaptions (Data courtesy of BNP Paribas, Londres).

Considérant la simplicité du modèle utilisé (covariance stationnaire des FRA), il est surprenant de constater que le modèle restitue bien la volatilité des Swaptions de sous-jacent inférieur à dix ans.

### 3.1.6 Rang faible ou matrice régulière?

Comme l'ont observé Boyd, Fazel & Hindi (2000), si on place une matrice définie positive comme objectif on obtient en général une matrice de rang faible: dont les

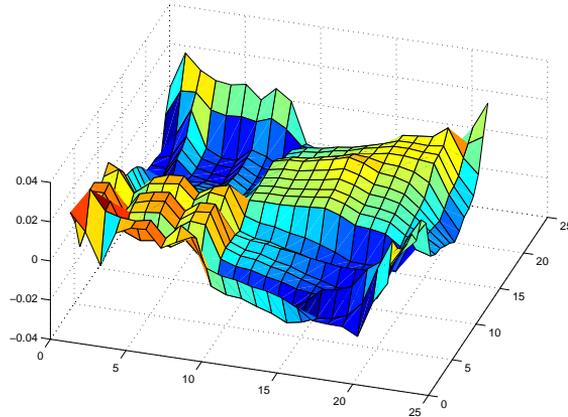


Figure 7: Solution de rang faible

valeurs propres sont rapidement décroissantes: On constate que la matrice est de rang deux. Cette méthode empirique donne d'excellents résultats en pratique mais aucune garantie ne eut être obtenue quant au rang maximum de la solution (le problème devient alors NP-complet).

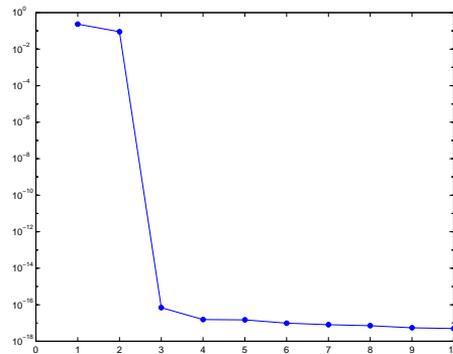


Figure 8: Valeurs propres de la matrice de covariance des FRA en échelle semilog.

Si on impose en plus des contraintes de lissage à la matrice de covariance, on obtient un résultat plus intuitif: mais cela se fait au prix d'une augmentation du

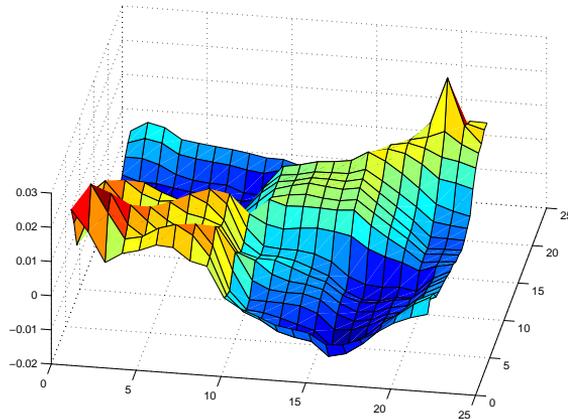


Figure 9: Solution du problème de calibration avec contraintes de régularité

rang de la solution: Cependant, comme la minimisation de la surface de la matrice

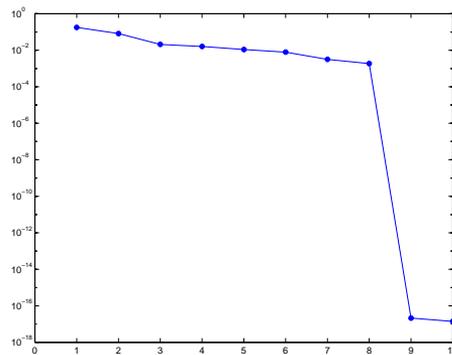


Figure 10: Valeurs propres de la matrice régulière.

de covariance revient à minimiser une entropie (quadratique), on s'attend à ce que cette matrice varie moins au cours du temps que celle obtenue par diminution du rang (on constate tout de même que cette matrice a uniquement deux valeurs propres dominantes, conformément aux résultats empiriques).

# References

- Avellaneda, M. & Paras, A. (1996), ‘Managing the volatility risk of portfolios of derivative securities: the lagrangian uncertain volatility model’, *Applied Mathematical Finance* **3**, 21–52.
- Black, F. & Scholes, M. (1973), ‘The pricing of options and corporate liabilities’, *Journal of Political Economy* **81**, 637–659.
- Boyd, S. P., Fazel, M. & Hindi, H. (2000), ‘A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation.’, *Working paper. American Control Conference, September 2000* .
- Brace, A., Dun, T. & Barton, G. (1999), ‘Towards a central interest rate model’, *Working Paper. FMMA* .
- Brace, A., Gatarek, D. & Musiela, M. (1997), ‘The market model of interest rate dynamics’, *Mathematical Finance* **7**(2), 127–155.
- Brace, A. & Womersley, R. S. (2000), ‘Exact fit to the swaption volatility matrix using semidefinite programming’, *Working paper, ICBI Global Derivatives Conference* .
- Fournie, E., Lebuchoux, J. & Touzi, N. (1997), ‘Small noise expansion and importance sampling’, *Asymptotic Analysis* **14**, 361–376.
- Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A. (1992), ‘Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology’, *Econometrica* **61**(1), 77–105.
- Lebuchoux, J. & Musiela, M. (1999), ‘Market models and smile effects in caps and swaptions volatilities.’, *Working paper, Paribas Capital Markets* .
- Nesterov, I. E. & Nemirovskii, A. S. (1994), *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Nesterov, I. E. & Todd, M. (1998), ‘Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones.’, *SIAM Journal on Optimization* **8**, 324–364.
- Rebonato, R. (1998), *Interest-Rate Options Models*, Financial Engineering, Wiley.
- Rebonato, R. (1999), ‘On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest rate models to black volatilities and to the correlation matrix.’, *Working paper* .

- Singleton, K. J. & Umantsev, L. (2001), ‘Pricing coupon-bond options and swaptions in affine term structure models’, *Working paper, Stanford University Graduate School of Business.* .
- Todd, M. & Yildirim, E. A. (1999), ‘Sensitivity analysis in linear programming and semidefinite programming using interior-points methods.’, *Working paper, School of Operation Research and Industrial Engineering, Cornell University.* .
- Vandenberghe, L. & Boyd, S. (1996), ‘Semidefinite programming’, *SIAM Review* **38**, 49–95.