Calibration des modèles de taux par la programmation semidéfinie.

Soutenance de thèse.

Février 2003.

A. d'Aspremont*

Directrice de thèse: Nicole El Karoui.

*alexandre.daspremont@polytechnique.org

1 Introduction

- Dans l'analyse de Heath, Jarrow & Morton (1992), un modèle de taux arbitré est entièrement paramétré par la donnée de la *courbe des taux aujourd'hui* et la *covariance*.

- Les méthodes existantes de calibration sont *très paramétrées* et ne couvrent qu'un sous ensemble *non-convexe* du cône des matrices de covariance (semidéfinies, positives).

- La calibration est souvent effectuée quotidiennement, non seulement pour l'évaluation des prix, mais aussi pour la gestion des risques.

- Complexité inconnue, stabilité aléatoire.

1.1 Questions pratiques

- Peut-on extraire l'information sur la corrélation (en fait la covariance) des données de marché sur les caps et swaptions?

- Les modèles sont recalibrés quotidiennement, comment les stabiliser?

1.2 Questions théoriques

- Quel modèle? Comment évaluer le prix des swaptions?
- Comment résoudre le problème inverse?
- Convergence: peut-on déterminer si les prix sont arbitrés ou non?
- Complexité?

1.3 Marchés de taux

1.3.1 Avantages

- Pas de dividendes: l'information contenue dans le prix des options est très "pure".

- Les options les plus liquides sont des paniers: les caps et swaptions.

1.3.2 Inconvénients

- Données propriétaires. Information fragmentée.

- Multiplication des courbes et marchés forwards.

1.4 Contributions

Évaluation des swaptions:

- Dans l'évaluation du prix d'une swaption , on peut assimiler le taux swap a un *panier de taux forwards*.

- Le panier est en fait une *combinaison convexe* de taux forwards et on peut supposer qu'ils sont tous *simultanément martingales* sous la mesure du swap.

- Le prix des swaptions devient un *prix de Black-Scholes* (formule de marché) avec une variance bien choisie.

1.5 Contributions

Calibration:

- Cette *"variance de marché"* est une *forme linéaire* sur la matrice de covariance des forwards.

- Si l'on choisit d'optimiser un objective linéaire en variance, le problème de la calibration peut donc se résoudre comme *un programme semidéfini.*

- Bid-Ask, stabilité, lissage, distance avec une matrice historique ... comme objectifs possibles.

- Le *dual* de ce programme est un programme de couverture et *fourni la sensibilité* de la solution à une variation des prix de marchés

1.6 Littérature associée

- Les travaux de Nesterov & Nemirovskii (1994) et Vandenberghe & Boyd (1996) sur la programmation semidéfinie, Nesterov & Todd (1998) pour un traitement général de la complexité des programmes linéaires sur les cones symmétriques.

- Les résultats Rebonato (1998), Brace, Dun & Barton (1999) et Singleton & Umantsev (2001) sur l'évaluation des swaptions comme paniers de forwards. Rebonato (1999) sur la calibration du BGM par paramétrisation des facteurs.

- Les travaux parallèles de Brace & Womersley (2000) sur la calibration du BGM par programmaion semidéfinie et l'impact du nombre de facteurs sur l'évaluation de la Mid-Atlantique.

- Les articles de Fournié, Lebuchoux & Touzi (1997) et Lebuchoux & Musiela (1999) sur le développement en petits bruits, Avellaneda, Boyer-Olson, Busca & Friz (2002) sur l'évaluation des options sur indice.

1.7 Plan de l'exposé

Première partie:

- Modèles de taux, notations.
- Approximation du prix de la Swaption comme prix d'une option sur un panier de forwards, mesure d'évaluation.
- Evaluation des options sur paniers dans un modèle de Black-Scholes, développement du prix.

Deuxième partie:

- Le problème de calibration comme un programme semidéfini.
- Programme dual et gestion des risques.
- Minimisation du rang ou stabilité?

2 Première partie

2.1 Notations

L'actif sans risque est $\beta_s = \exp\left(\int_t^s r(u,0)du\right)$, où $r(u,0)$ est le taux court spot a la date u. Selon Heath et al. (1992), si on note $B(s,T)$ le prix du Z.C. de maturité T

$$B(s,T) = E_s^{\mathbf{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^t r(u,0)du\right)\right]$$

l'absence d'arbitrage entre les différents Z.C. impose:

$$\frac{B(s,T)}{\beta_s} = B(t,T)\exp\left(-\int_t^s \sigma^B(u,T-u)dW_u - \frac{1}{2}\int_t^s \left\|\sigma^B(u,T-u)\right\|^2 du\right)$$

avec $\sigma^B(.,.)$:$\mathrm{R}_+^2 \longmapsto \mathrm{R}_+^n$, la volatilité des Z.C. et $W = \{W_t, t \geq 0\}$ est un B.M. de dimension n sous $\mathbf{Q}$.

2.2 Le modèle de marché sur les LIBOR

Dans ce modèle, on suppose que le taux forward LIBOR

$$1 + \delta L(t, \theta) = \exp \left(\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, \nu) d\nu \right)$$

a une volatilité lognormale:

$$dL(s, \theta) = (...)ds + L(s, \theta)\gamma(s, \theta)dW_s$$

avec déterministe et si on impose $\sigma(s, \theta) = 0$, $\forall\, \theta \in [0, \delta[$ comme dans Brace, Gatarek & Musiela (1997), on a spécifié la volatilité des Z.C.:

$$\sigma^B(s, \theta) = \sum_{k=1}^{\lfloor \delta^{-1}\theta \rfloor} \frac{\delta L(s, \theta - k\delta)}{1 + \delta L(s, \theta - k\delta)} \gamma(s, \theta - k\delta)$$

2.3 Swaps

- Le taux swap est défini par:

$$swap(t,T,T_n) = \frac{B(t,T^{floating}) - B(t,T_{n+1}^{floating})}{Level(t,T^{fixed},T_n^{fixed})}$$

avec $Level(t,T^{fixed},T_n^{fixed}) = \sum_{i=i_T}^{n} coverage(T_i^{fixed},T_{i+1}^{fixed})B(t,T_i^{fixed})$.

- On peut encore écrire ce taux comme:

$$swap(t,T,T_n) = \sum_{i=i_T}^{n} \omega_i(t)K(t,T_i^{float})$$

où

$$\omega_i(t) = \frac{coverage(T_i^{float},T_{i+1}^{float})B(t,T_{i+1}^{float})}{Level(t,T^{fixed},T_n^{fixed})} \quad \text{et} \quad K(t,T) = L(t,T-t)$$

- Les poids $\omega_i(t)$ sont remarquablement stables (Rebonato (1998)).

2.4 Swaptions

Les taux suivent la dynamique du modèle de marché sur les taux LIBOR et le prix de la swaption est somme de prix de calls sur le taux swap à la date T:

$$Ps(t) = B(t,T)E_t^{Q_T}\left[\sum_{i=i_T}^{N}\frac{\beta(T)\delta cvg(i,b)}{\beta(T_{i+1})}\left(swap(T,T,T_N)-k\right)^+\right]$$

où $\mathbf{Q}^T$ est la probabilité forward en T. Si on définit une nouvelle probabilité martingale $\mathbf{Q}^{LVL}$ associée au forward swap:

$$\frac{d\mathbf{Q}^{LVL}}{d\mathbf{Q}^T}|_t = B(t,T)\beta(T)\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta cvg(i,b)\beta^{-1}(T_{i+1})}{Level(t,T,T_N)}$$

et on réécrit les swaptions comme des options sur le taux swap:

$$Ps(t) = Level(t,T,T_N)E_t^{Q_{LVL}}\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\omega_i(t)K(t,T_i)-k\right)^+\right]$$

2.5 Swaption (formule en prix)

On peut aussi écrire le prix de la swaption de strike k et de maturité T comme celui d'un put sur un panier de Z.C. (El Karoui & Rochet (1989)):

$$Ps(t) = B(t,T)E_t^{Q_T}\left[\left(1 - B(t,T_{N+1}) - k\delta \sum_{i=i_T}^{N} B(t,T_i)\right)^+\right]$$

les coefficients dans le panier sont ici constants. Dans le modèle lognormal en prix, les swaption peuvent donc ici aussi être évaluées comme des *options sur un panier d'actifs lognormaux.*

2.6 Calcul du prix

Approximations:

- Contribution des poids par rapport a celle des forwards dans la volatilité du swap?
- Termes de drift provenant des forwards sous $\mathbf{Q}^{LVL}$?
- Développement explicite du prix des swaptions?

2.7 Impact des poids

La dynamique du swap s'écrit:

$$dswap(s,T,T_N) = \sum_{i=i_T}^{N} \omega_i(s) K(s,T_i) \left(\gamma(s,T_i - s) + \eta(s,T_i)\right) dW_s^{LVL}$$

où la contribution des poids est

$$\eta(s,T_i) = \left(\sum_{k=i_T}^{N} \omega_i(s) \left(\sigma^B(s,T_i - s) - \sigma^B(s,T_k - s) \right) \right)$$

avec $\sigma^B(t,\theta)$, la volatilité des Z.C. En pratique $\delta K(s,T_j) \simeq 1\%$ et

$$\sum_{i=i_T}^{N} \omega_i(s) K(s,T_i) \eta(s,T_i) = \sum_{i=i_T}^{N} \omega_i(s) \left(K(s,T_i) - swap(s,T,T_N) \right) \eta(s,T_i)$$

avec $\sum_{i=i_T}^{N} \omega_i(s) = 1$ et $0 \leq \omega_i(s) \leq 1$. Zéro quand la courbe est plate...

2.8 Changement de mesure

- On définit $K^{LVL}(s,T_i)$ comme:

$$dK^{LVL}(s,T_i) = K^{LVL}(s,T_i)\gamma(s,T_i - s)dW_s^{LVL}$$

avec $K^{LVL}(t,T_i) = K(t,T_i)$.

- On peut approximer le swap par une autre martingale sous $\mathbf{Q}^{LVL}$:

$$dY_s = \sum_{i=i_T}^{N} \omega_i(t)K^{LVL}(s,T_i)\gamma(s,T_i - s)dW_s^{LVL}, \quad Y_t = swap(t,T,T_N).$$

avec

$$E\left[\left(\sup_{t\leq s\leq T}(swap(s) - Y_s)\right)^2\right] \leq ... \left\|\xi_j(s)\right\|_4^2 + \left(K(t,T_{k^*})\,(N - i_T)\,\delta\bar{\gamma}^2\right)^2$$

- Les swaptions peuvent donc être évaluées comme des *options sur paniers de taux lognormaux*.

2.9 Options sur un panier d'actifs lognormaux

Pour simplifier, on note

$$dF_s^i = F_s^i \sigma_s^i dW_s$$

où W_t un $\mathbf{Q}^T$-Brownien n-dimensionel et $\sigma_s = \left(\sigma_s^i\right)_{i=1,\ldots,n} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ est la volatilité. $\Gamma_s \in \mathrm{R}^{n\times n}$ est la matrice de covariance correspondante. On cherche à calculer le prix d'un Call sur panier dont le payoff à maturité est donné par:

$$h\left(F_T^\omega\right) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i F_T^i - k\right)^+ \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

La dynamique du sous-jacent $F_s^\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i F_s^i$ est:

$$dF_s^\omega = F_s^\omega \left(\sum_{i=1}^n \widehat{\omega}_{i,s} \sigma_s^i\right) dW_s \quad \text{avec} \quad \widehat{\omega}_{i,s} = \frac{\omega_i F_s^i}{\sum_{i=1}^n \omega_i F_s^i}$$

2.10 Volatilité: terme central

- La dynamique de ces poids est donc donnée par

$$\frac{d\widehat{\omega}_{i,s}}{\widehat{\omega}_{i,s}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\left(\sigma_s^i - \sigma_s^j\right)\right)\left(dW_s + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\sigma_s^j ds\right)$$

- Si les volatilités σ_s^i sont identiques, la dynamique du forward F_s^ω est exactement lognormale avec comme volatilité $\sigma_s^\omega = \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{i,t}\sigma_s^j$.

- On définit les volatilités résiduelles:

$$\xi_s^i = \sigma_s^i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,t}\sigma_s^j \quad \text{avec} \quad \sigma_s^\omega = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{i,t}\sigma_s^j$$

2.11 Développement du prix

- En pratique, la volatilité résiduelle et les moyennes $\sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\xi_s^j$ sont petites.

- On développe en remplaçant $\sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\xi_s^j$ par $\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}^{\varepsilon}\xi_s^j$ pour un $\varepsilon > 0$ petit:

$$\begin{cases} dF_s^{\omega,\varepsilon} = F_s^{\omega,\varepsilon} \left(\sigma_s^{\omega} + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\xi_s^j\right) dW_s \\ d\widehat{\omega}_{i,s}^{\varepsilon} = \widehat{\omega}_{i,s}^{\varepsilon} \left(\xi_s^i - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}^{\varepsilon}\xi_s^j\right) \left(dW_s + \sigma_s^{\omega} ds + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\xi_s^j ds\right) \end{cases}$$

- Comme dans Fournié et al. (1997) et Lebuchoux & Musiela (1999) on cherche donc a évaluer:

$$C^{\varepsilon} = E\left[\left(F_T^{\omega,\varepsilon} - k\right)^{+} \mid (F_t^{\omega}, \widehat{\omega}_t)\right]$$

  en l'approximant par son développement de Taylor autour de $\varepsilon = 0$:

$$C^{\varepsilon} = C^{0} + C^{(1)}\varepsilon + C^{(2)}\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

  où ε est défini comme la norme d'un résidu de volatilité:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,s}\xi_s^j \right\|$$

  avec $\xi_s^i = \sigma_s^i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_{j,t}\sigma_s^j$.

2.12 Terme d'ordre zéro

- Le terme d'ordre zéro se calcule directement comme la solution de l'E.D.P. limite:

$$\begin{cases} \frac{\partial C^0}{\partial s} + \|\sigma_s^\omega\|^2 \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 C^0}{\partial x^2} = 0 \\ C^0 = (x-K)^+ \text{ for } s = T \end{cases}$$

- On obtient C^0 par la formule de Black & Scholes (1973) avec comme variance $\left\|\sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{i,t}\sigma_s^j\right\|^2$:

$$C^0 = BS(T, F_t^\omega, V_T) = F_t^\omega n(h(V_T)) - \kappa n\left(h(V_T) - V_T^{1/2}\right)$$

avec

$$h\left(V_T\right) = \frac{\left(\ln\left(\frac{F_t^\omega}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}V_T\right)}{V_T^{1/2}} \quad \text{et} \quad V_T = \int_t^T \|\sigma_s^\omega\|^2 \, ds$$

2.13 Terme d'ordre un

On peut ensuite s'intéresser à l'E.D.P. vérifiée par $C^1 = \partial C^\varepsilon / \partial \varepsilon$:

$$\begin{cases} L_1^\varepsilon C^{(1)} = 0 \\ C^{(1)} = 0 \text{ en } s = T \end{cases}$$

où l'on a noté (x panier, y poids):

$$\begin{aligned} L_1^\varepsilon = \; & \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial s} + \left\| \sigma_s^\omega + \varepsilon \sum_{j=1}^n y_j \xi_s^j \right\|^2 \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial x^2} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\left\langle \xi_s^j, \sigma_s^\omega \right\rangle + \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \left\langle \xi_s^j - \sigma_s^\omega, \xi_s^k \right\rangle - \varepsilon^2 \left\| \sum_{k=1}^n y_k \xi_s^k \right\|^2 \right) x y_j \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial x \partial y_j} \\ & + \sum_{j=1}^n \left\| \xi_s^j - \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \xi_s^k \right\|^2 \frac{y_j^2}{2} \frac{\partial^2 C^\varepsilon}{\partial y_j^2} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\left\langle \xi_s^j, \sigma_s^\omega \right\rangle + \varepsilon \sum_{k=1}^n y_k \left\langle \xi_s^j - \sigma_s^\omega, \xi_s^k \right\rangle - \varepsilon^2 \left\| \sum_{k=1}^n y_k \xi_s^k \right\|^2 \right) y_j \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial y_j} \end{aligned}$$

... on passe à la limite en $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} L_1^0 C^{(1)} + \left(\sum_{j=1}^n y_j \left\langle \xi_s^j, \sigma_s^\omega \right\rangle\right) x^2 \frac{\partial^2 C^0}{\partial x^2} = 0 \\ C^{(1)} = 0 \text{ en } s = T \end{cases}$$

Ceci permet de calculer $C^{(1)}$ en utilisant la représentation de Feynman-Kac:

$$C^{(1)} = F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,t} \left\langle \xi_u^j, \sigma_s^\omega \right\rangle \exp\left(\int_t^s -\frac{1}{2}\left\|\xi_u^j - \sigma_u^\omega\right\|^2 du\right)$$

$$E\left[\frac{\exp\left(\int_t^s \left(\sigma_u^\omega + \xi_u^j\right) dW_u\right)}{V_{s,T}^{1/2}} n\left(\frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \sigma_u^\omega dW_u - \frac{1}{2}V_{t,s} + \frac{1}{2}V_{s,T}}{V_{s,T}^{1/2}}\right)\right] ds$$

pour obtenir:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,t} \frac{\left\langle \xi_s^j, \sigma_s^\omega \right\rangle}{\left(V_{t,s} + V_{s,T}\right)^{1/2}} \exp\left(2 \int_t^s \left\langle \xi_u^j, \sigma_u^\omega \right\rangle du\right) \\ & \qquad n\left(\frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \left\langle \xi_u^j, \sigma_u^\omega \right\rangle du + \frac{1}{2}V_{t,T}}{\left(V_{t,s} + V_{s,T}\right)^{1/2}}\right) ds \end{aligned}$$

2.14 Prix de l'option sur panier

On obtient une formule approximant le prix de l'option sur panier:

$$E_t\left[(F_T^\omega - k)^+\right] = BS(T, F_t^\omega, V_T) + C^{(1)}$$

où

$$V_T = \int_t^T \|\sigma_s^\omega\|^2\, ds$$

et

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= F_t^\omega \int_t^T \sum_{j=1}^n \widehat{\omega}_{j,t} \frac{\left\langle \xi_s^j, \sigma_s^\omega \right\rangle}{V_{t,T}^{1/2}} \exp\left(2 \int_t^s \left\langle \xi_u^j, \sigma_u^\omega \right\rangle du\right) \\ &\quad n\left(\frac{\ln \frac{F_t^\omega}{K} + \int_t^s \left\langle \xi_u^j, \sigma_u^\omega \right\rangle du + \frac{1}{2} V_{t,T}}{V_{t,T}^{1/2}}\right) ds \end{aligned}$$

2.15 Interprétation en termes de couverture

- On se couvre en delta avec la volatilité approximée σ_s^ω et comme dans El Karoui, Jeanblanc-Picqué & Shreve (1998), on étudie l'erreur de couverture qui s'obtient comme:

$$e_T = \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left\| \sum_{i=1}^n \widehat{\omega}_{i,s}\sigma_s^i \right\|^2 - \|\sigma_s^\omega\|^2 \right) (F_s^\omega)^2 \frac{\partial^2 C^0(F_s^\omega, V_{t,T})}{\partial x^2} ds$$

- Au premier ordre en ξ_u^j, on obtient:

$$e_T^{(1)} = \int_t^T \sum_{i=1}^n \left\langle \xi_s^i, \sigma_s^\omega \right\rangle \widehat{\omega}_{i,s} F_s^\omega \frac{n(h(V_{s,T}, F_s^\omega))}{V_{s,T}^{1/2}} ds$$

- On retrouve donc:

$$C^{(1)} = E\left[e_T^{(1)}\right]$$

2.16 Application aux swaptions

Dans le cas des Swaption, la formule a l'ordre zéro s'écrit:

$$Level(t,T,T_N)\left(swap(t,T,T_N)N(h)-\kappa N(h-V_T^{1/2})\right)$$

avec

$$h=\frac{\left(\ln\left(\frac{swap(t,T,T_N)}{\kappa}\right)+\frac{1}{2}V_T\right)}{V_T^{1/2}}$$

et où

$$V_T=\int_t^T\left\|\sum_{i=1}^N\hat{\omega}_i(t)\gamma(s,T_i-s)\right\|^2 ds$$

avec

$$\hat{\omega}_i(t)=\omega_i(t)\frac{K(t,T_i)}{swap(t,T,T_N)}$$

2.17 Précision de la formule sur les paniers simples

- Comparaison avec un Monte-Carlo. Les paramètres sont ici

$$\begin{aligned} F_0^i &= \{0.07, 0.05, 0.04, 0.04, 0.04\} \\ \omega_i &= \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\} \end{aligned}$$

  $T = 5$ ans, la matrice de covariance est donnée par:

$$\frac{11}{100}\begin{pmatrix} 0.64 & 0.59 & 0.32 & 0.12 & 0.06 \\ 0.59 & 1 & 0.67 & 0.28 & 0.13 \\ 0.32 & 0.67 & 0.64 & 0.29 & 0.14 \\ 0.12 & 0.28 & 0.29 & 0.36 & 0.11 \\ 0.06 & 0.13 & 0.14 & 0.11 & 0.16 \end{pmatrix}$$

- Approx. pour une Swaption (5 ans, 5ans). La matrice de covariance est issue de données historiques sur la covariance des FRA.

- But: isoler l'erreur provenant uniquement de l'approximation du prix, et pas du changement de proba.

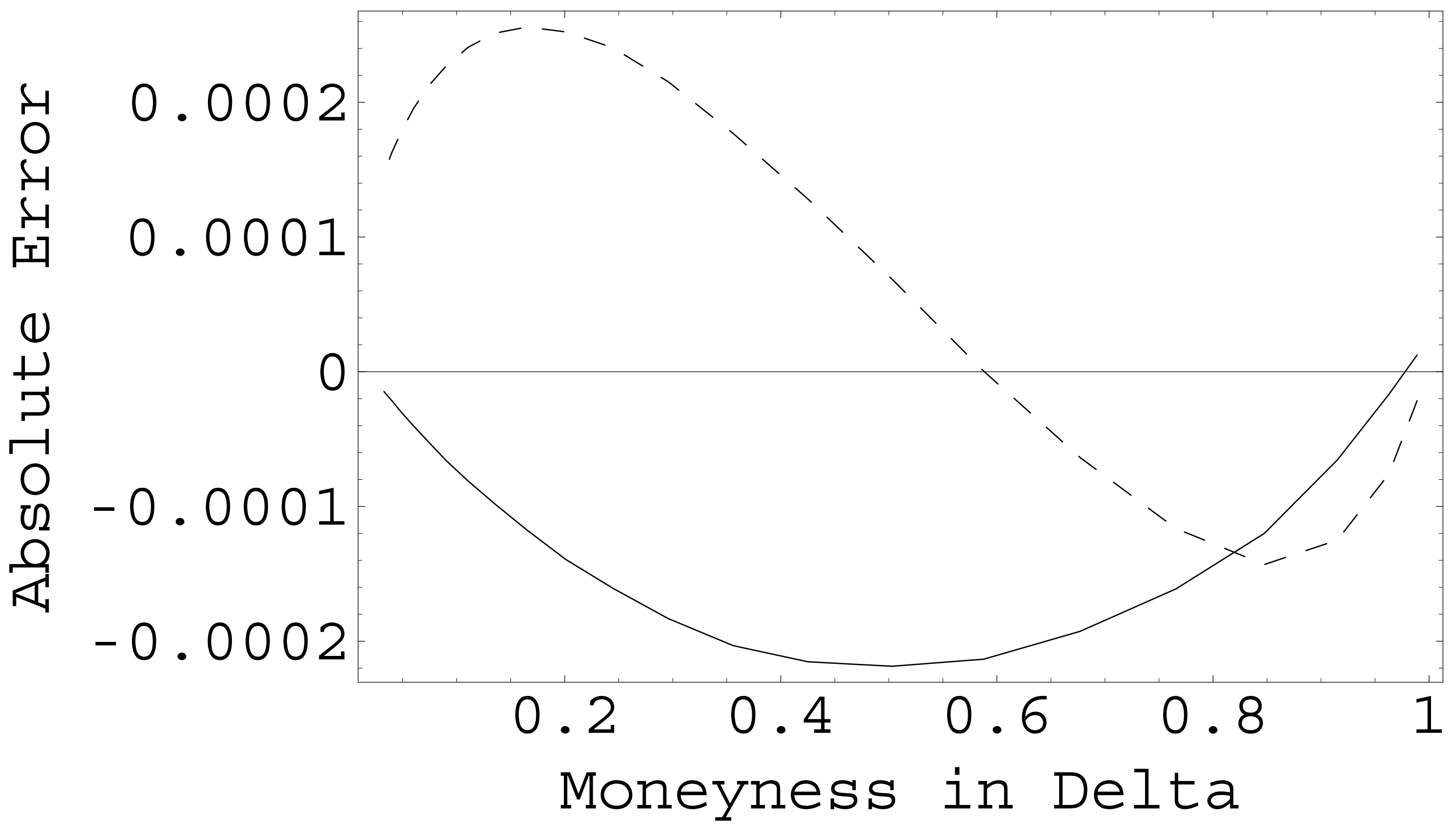

Figure 1: Erreur à l'ordre zéro (dashed) et l'ordre un (continu). Covariance statistique.

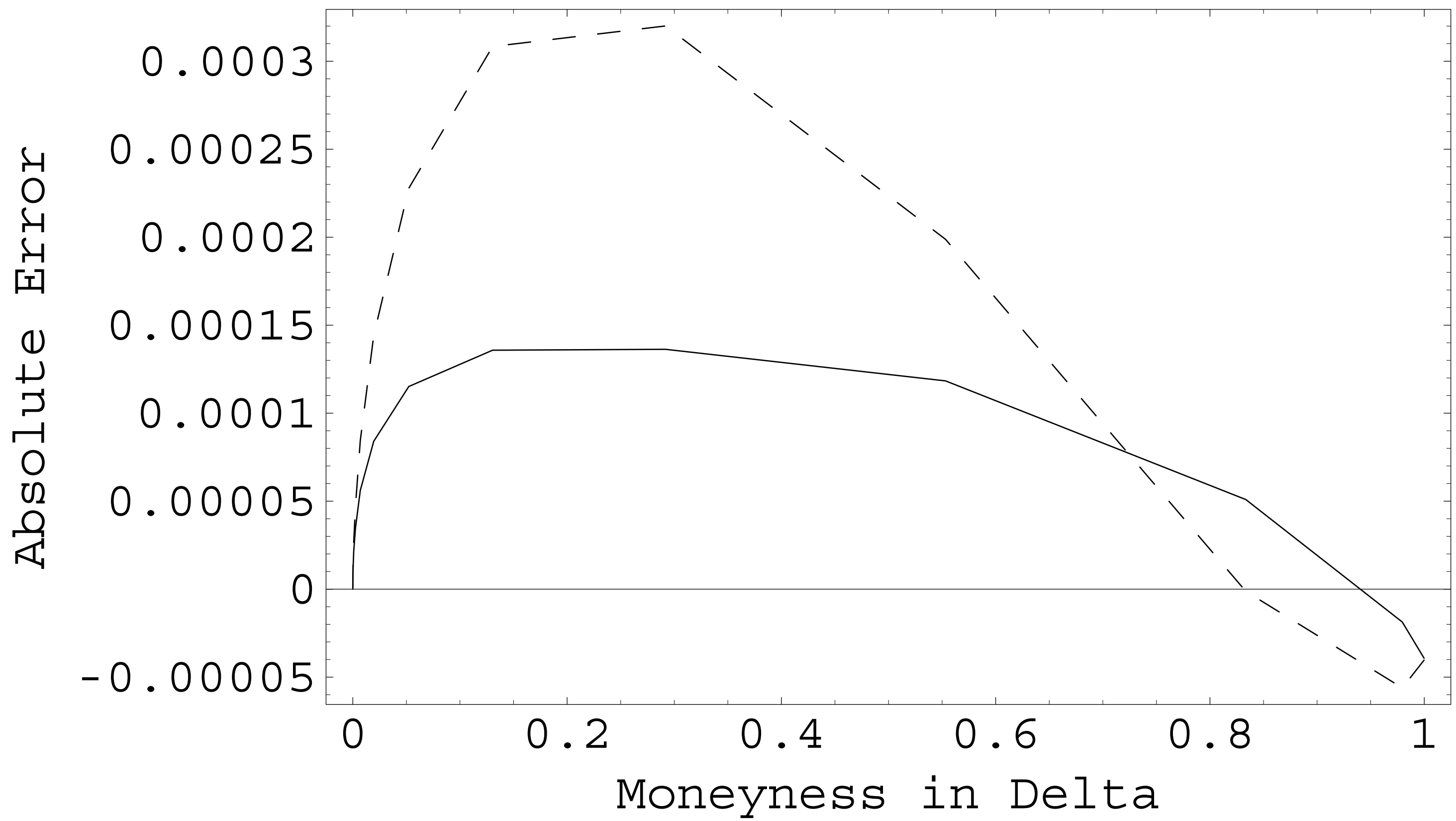

Figure 2: Erreur à l'ordre zéro (dashed) et l'ordre un (continu). Corrélations nulles.

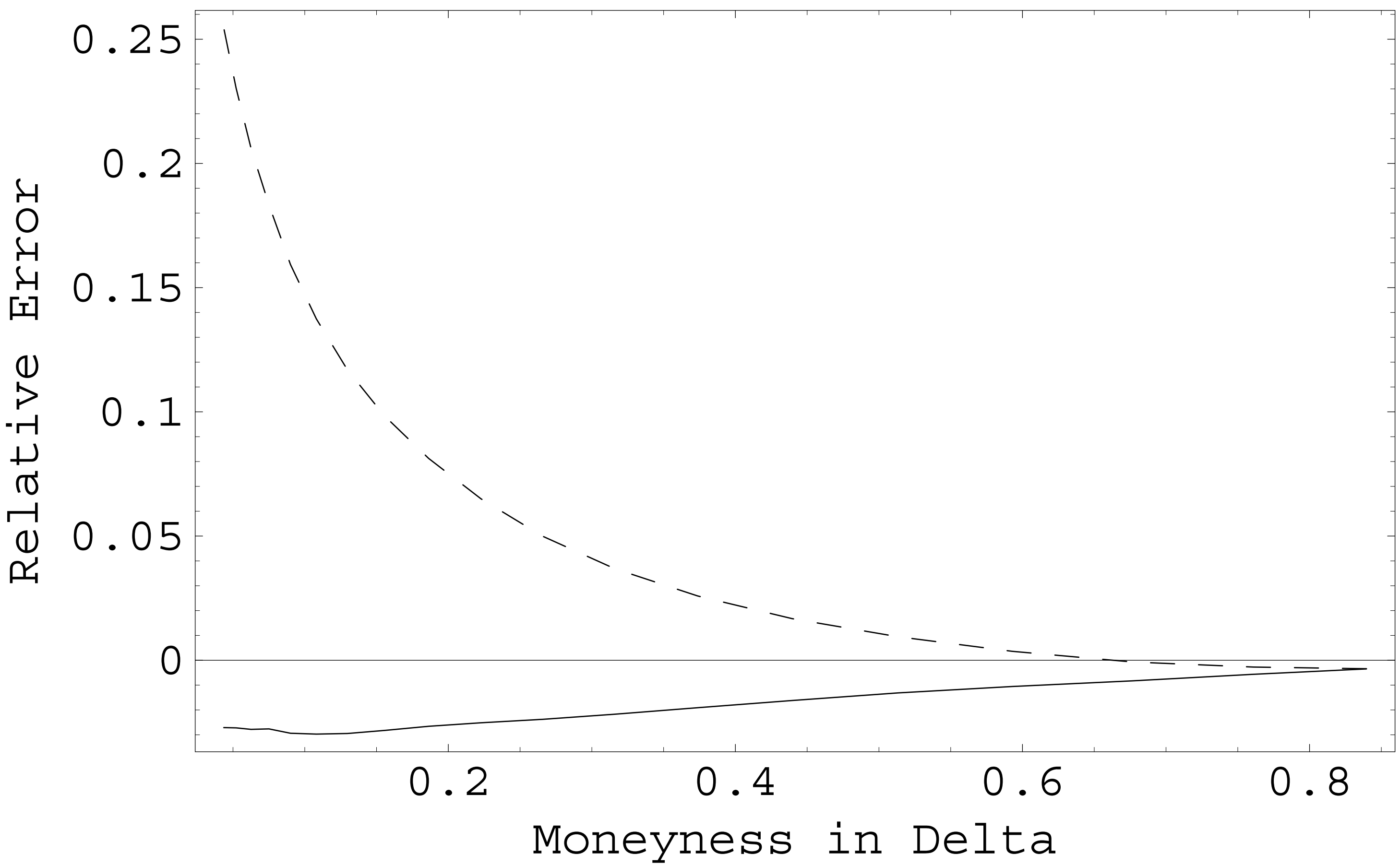

Figure 3: Erreur à l'ordre zéro (dashed) et l'ordre un (continu), pour un panier d'actions.

2.18 Précisicion de la formule dans le modèle lognormal sur LIBOR.

- On peut aussi tester la qualité de l'approximation à l'ordre zéro dans le cadre du modèle de marché en comaprant encore une fois avec les résultats obtenus par Monte-Carlo.

- L'erreur provient ici de la formule du prix et des approximations sur la dynamique des poids (volatilité et changement de proba). (Figure 4). (Données et code courtesy of BNP Paribas, Londres).

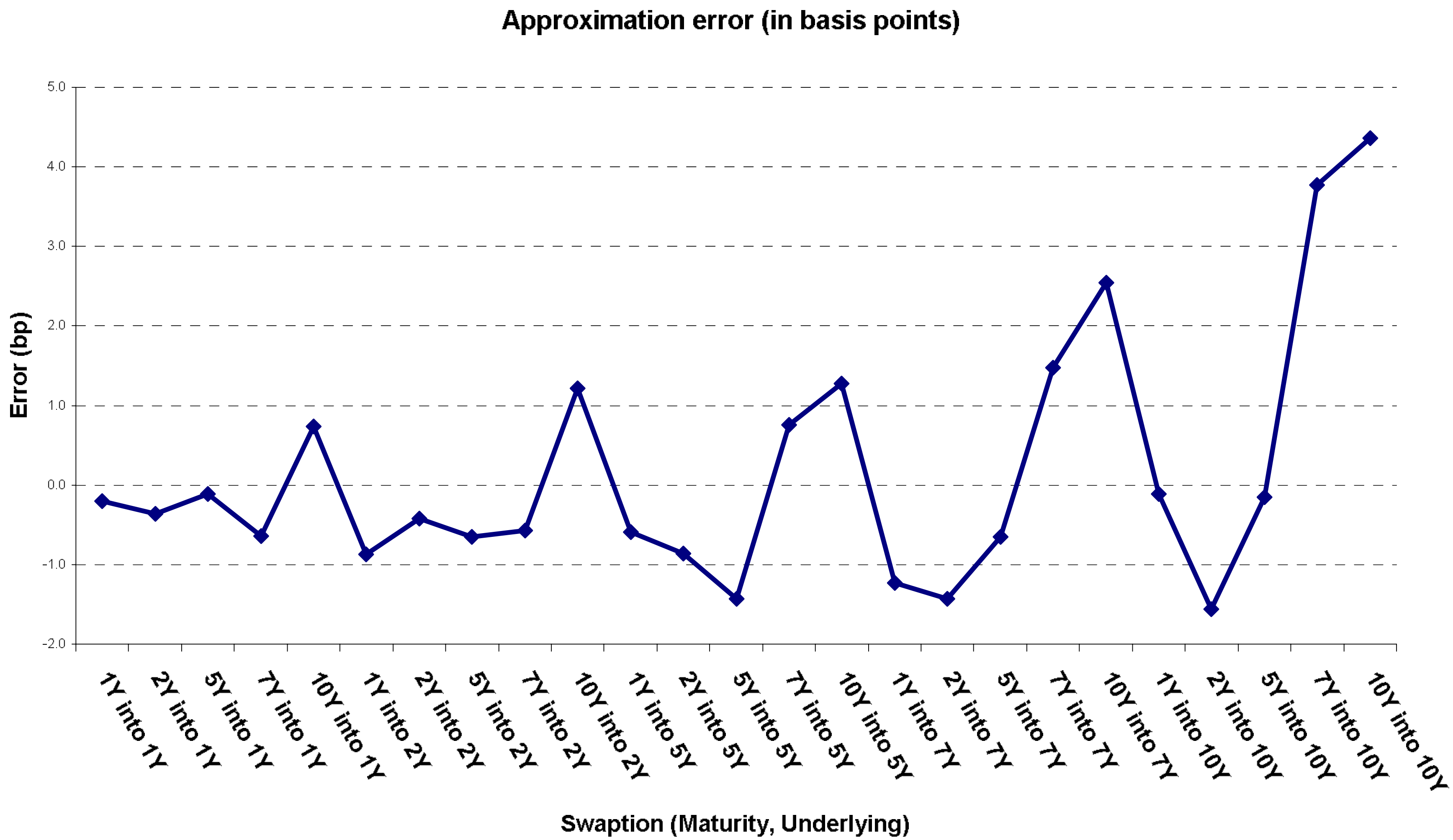

Figure 4: Erreur à l'ordre zéro sur le modèle lognormal en LIBOR (BGM).

3 Deuxième partie: calibration et gestion des risques

- Le prix de la swaption peut s'approximer par son prix de Black calculé avec une variance de marché bien choisie.

- Avec

$$\hat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \frac{K(t, T_i)}{swap(t, T, T_N)}$$

où les $\omega_i(t)$ proviennent de la décomposition du Swap en panier de FRA, cette variance variance s'obtient comme:

$$\begin{aligned} V_T &= \int_t^T \left\| \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i(t) \gamma(s, T_i - s) \right\|^2 ds \\ &= \int_t^T Tr\left(\Omega_t \Gamma_s\right) ds \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_t = \hat{\omega}(t)\hat{\omega}(t)^T = \left(\hat{\omega}_i(t)\hat{\omega}_j(t)\right)_{i,j \in [1,N]} \succeq 0$$

- On se donne une série de variances de marché $\sigma_k^2 T_k$ correspondants à des swaptions (ou caplets) avec poids ω_k et de maturité T_k

- On suppose que la covariance des LIBOR est constante par morceaux, et on écrit le programme de calibration comme:

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver} & X_i \\ \text{avec} & \sum_{i=t}^{T} \delta Tr\left(\Omega_{t,k} X_i\right) = \sigma_k^2 T_k \text{ où } k = 1, ..., M \\ & X_i \succeq 0 \text{ pour } i = 0, ..., T \end{array}$$

ou encore, sous-forme bloc-diagonale:

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver} & X \\ \text{avec} & Tr\left(\Omega_k X\right) = \sigma_k^2 T_k \text{ où } k = 1, ..., M \\ & X \succeq 0 \text{ pour } i = 0, ..., T \end{array}$$

- Le programme de calibration s'exprime donc comme une inégalité matricielle linéaire (L.M.I.) avec comme inconnue la matrice de covariance des FRA.

- L'ensemble des covariances calibrées au marché s'écrit comme l'intersection du cône des matrices semidéfinies positives avec un espace affine.

- La (figure 5) représente le cône:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \succeq 0 \Longleftrightarrow \min_i \lambda_i(X) \geq 0$$

- L'intersection de ce cône avec un plan (ici, $x + z = 1$), est représentée (figure 6)

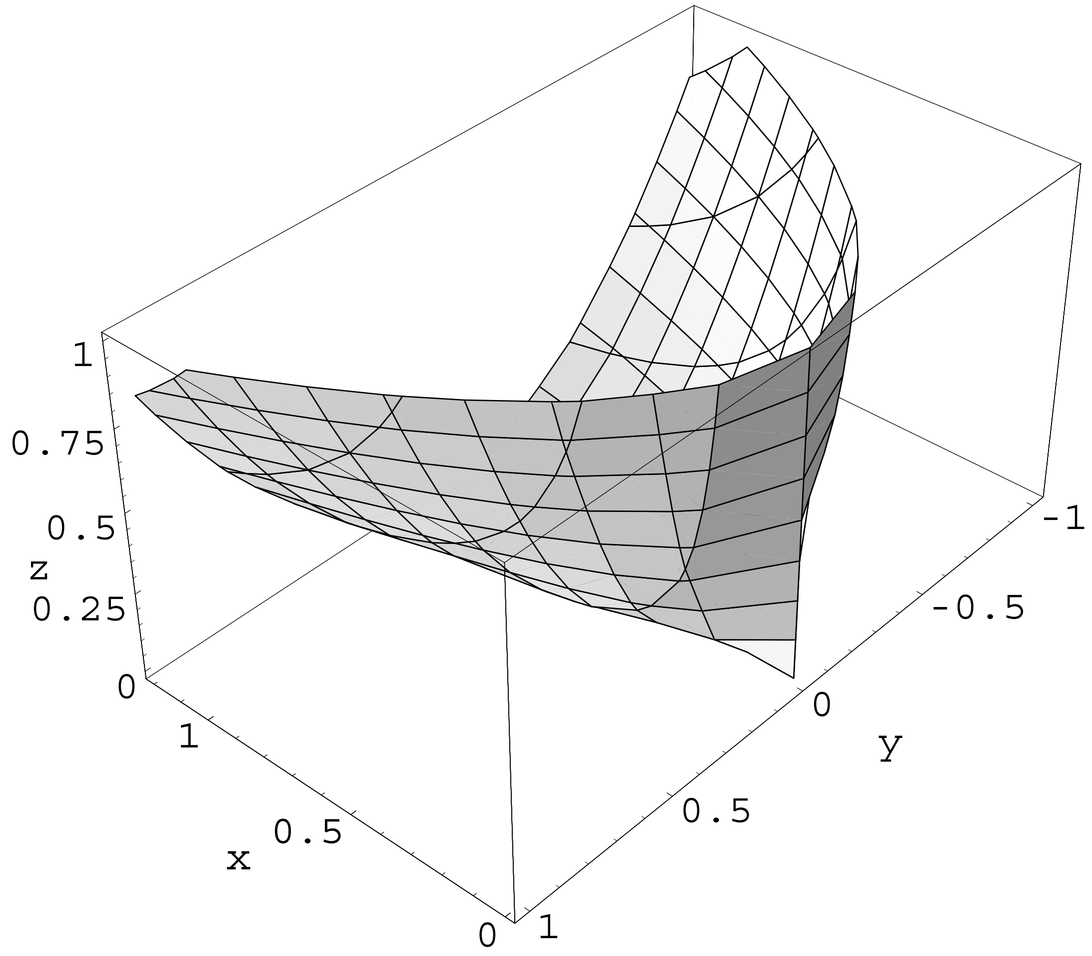

Figure 5: Le cône des matrices semidéfinies positives en dimension trois. (quadratique dans ce cas simple)

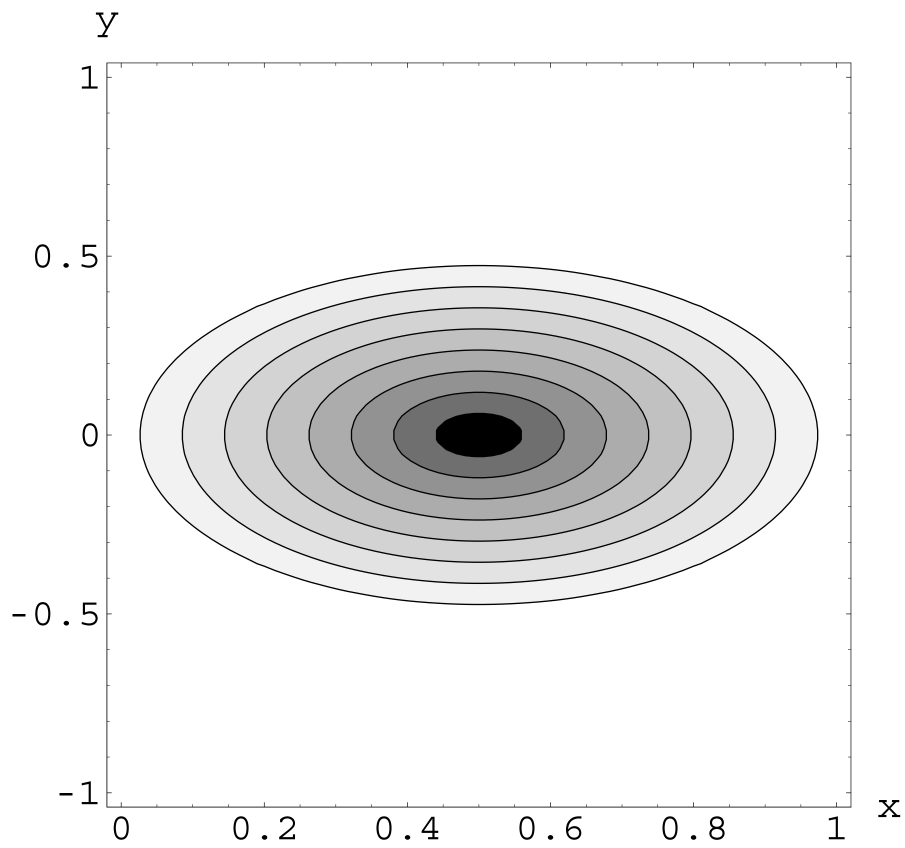

Figure 6: Domaine d'un programme semidéfini.

3.1 Objectifs

- *Régularisation de Tikhonov* (voir Cont (2001))
- *Lissage*
- *Distance* avec une matrice C
- *Bornes sur le prix d'une autre swaption*
- *Robustesse* (ou centrage de la solution)
- Une autre swaption
- Ou un mélange....

3.2 Dualité

Le dual du SDP de calibration est un programme avec objectif linéaire, où les contraintes sont données par une inégalité matricielle linéaire. Le cône des matrices semidéfinies positives est autoadjoint, et on forme le Lagrangien

$$\begin{aligned} L(X,y) &= -\mathbf{Tr}(CX) + \sum_{k=1}^{M} y_k \left(\mathbf{Tr}(\Omega_k X) - \sigma_k^2 T_k\right) \\ &= \mathbf{Tr}\left(\sum_{k=1}^{M} (y_k \Omega_k - C)\, X\right) - \sum_{k=1}^{M} y_k \sigma_k^2 T_k \end{aligned}$$

pour obtenir directement le dual:

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \sum_{k=1}^{M} y_k \sigma_k^2 T_k \\ \text{pour} & 0 \preceq \left(\sum_{k=1}^{M} y_k \Omega_k - C\right) \end{array}$$

3.3 Calcul des sensibilités

- Résultats de Todd & Yildirim (1999) pour calculer la sensibilité de la solution a un changement dans les conditions du marché.

- Un pas dans l'algo. de Newton:

$$\Delta X = E^{-1}FA^* \left[\left(AE^{-1}FA^* \right)^{-1} u \right]$$

et on obtient la nouvelle solution si l'on reste dans la zone de convergence quadratique:

$$\left\| (X^*)^{-\frac{1}{2}} \left(E^{-1}FA^* \left[\left(AE^{-1}FA^* \right)^{-1} u \right] \right) (X^*)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq 1$$

- On dispose donc d'une matrice donnée par

$$S = E^{-1}FA^* \left[\left(AE^{-1}FA^* \right)^{-1} \right]$$

qui permet de calculer directement la sensibilité de la solution à l'ensemble des scenarios de marché possibles.

3.4 Rang faible ou matrice régulière?

- Fazel, Hindi & Boyd (2000): si on place une matrice définie positive comme objectif on obtient en général une matrice dont les valeurs propres sont rapidement décroissantes (figure 7).

- Dans l'exemple utilisé ici, on constate que la matrice est de rang deux (figure 8).

- Cette méthode empirique donne d'excellents résultats en pratique mais aucune garantie ne peut être obtenue quant au rang maximum de la solution (le problème devient alors NP-complet).

- Cela implique également qu'il est illusoire d'essayer d'obtenir un algorithme efficace de calibration d'un modèle paramétré par facteurs (à la Rebonato (1998))...

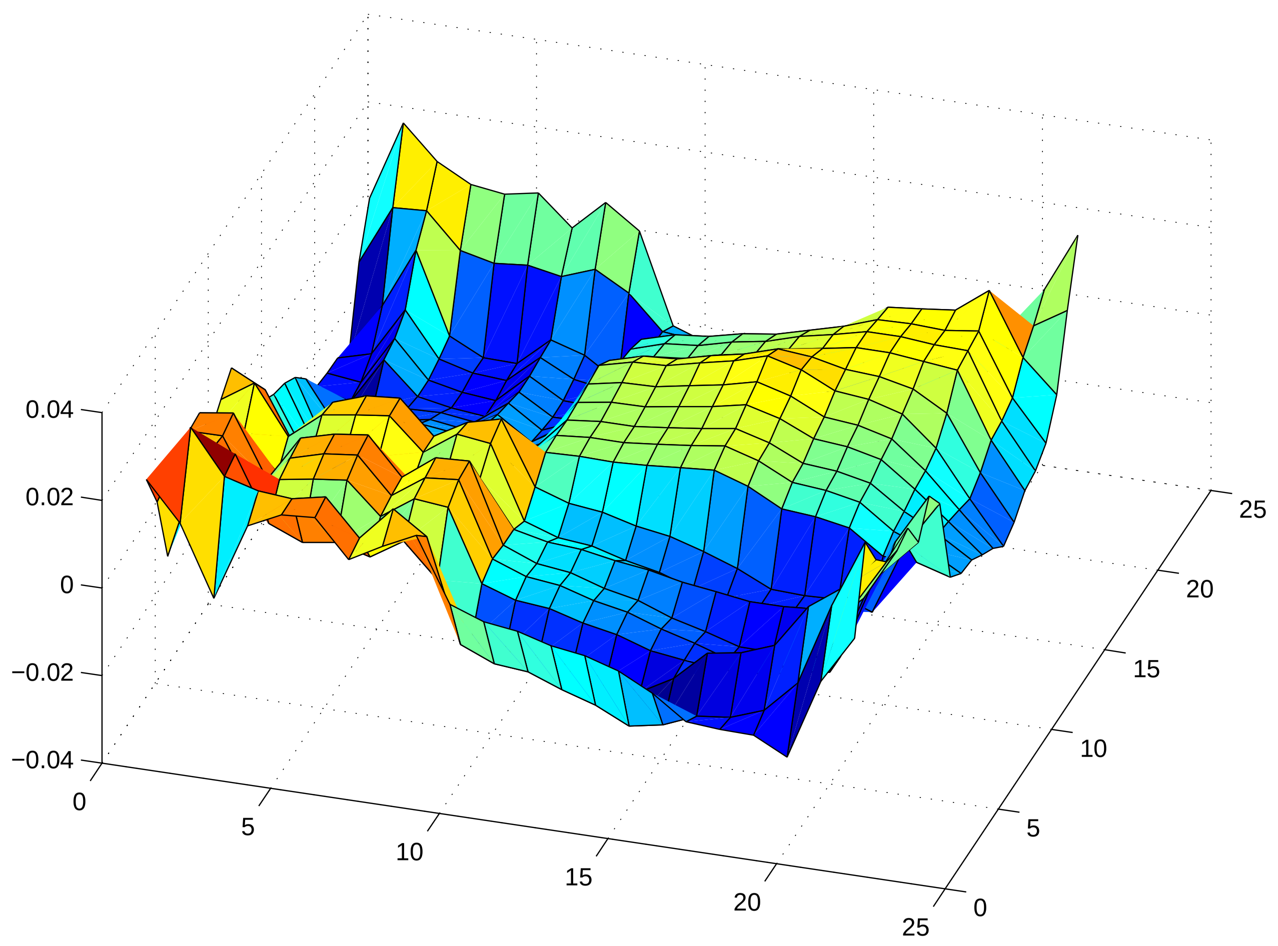

Figure 7: Solution de rang faible

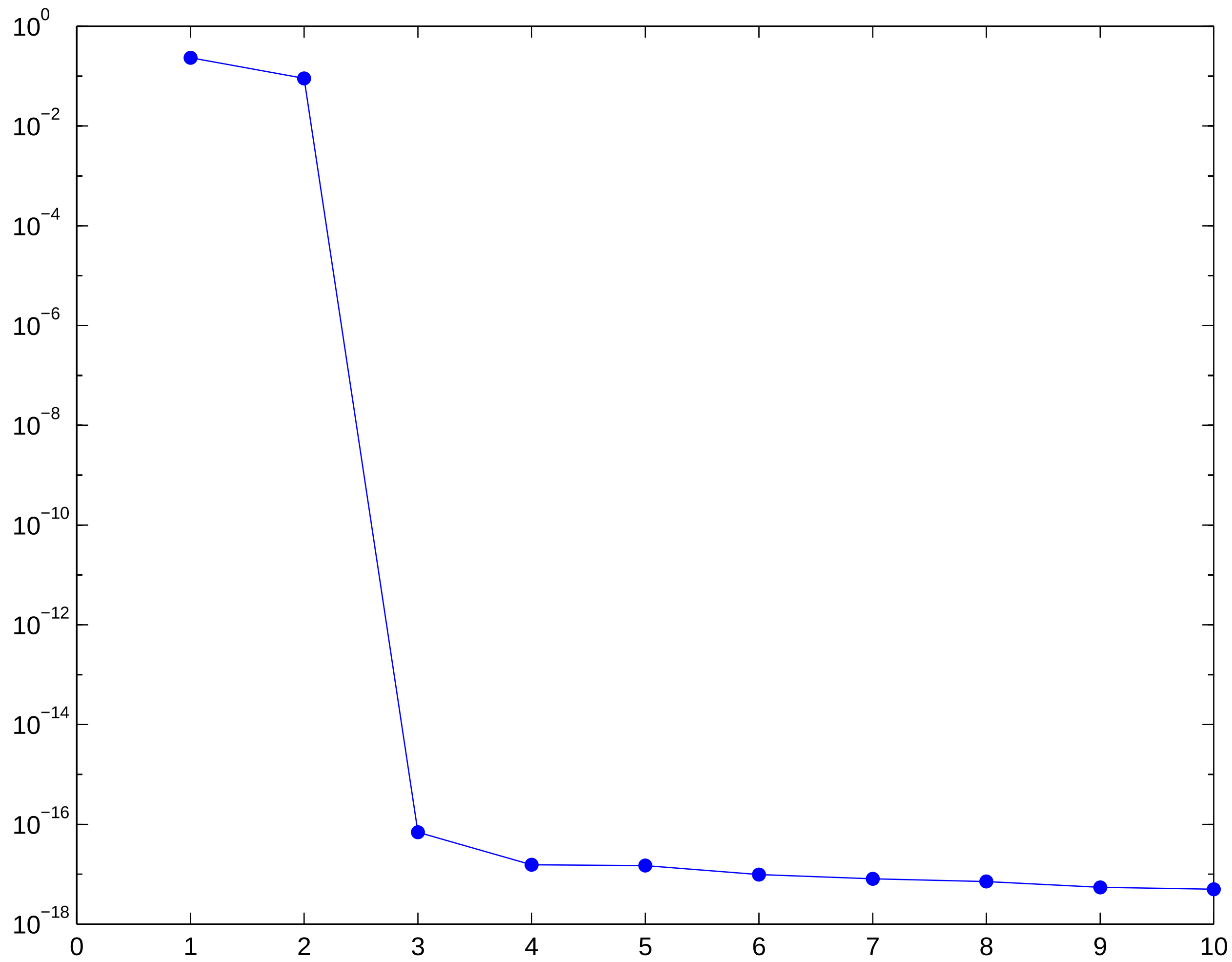

Figure 8: Valeurs propres de la matrice de covariance des FRA en échelle semilog.

- Si on impose en plus des contraintes de lissage à la matrice de covariance, on obtient un résultat plus intuitif, mais cela se fait au prix d'une augmentation du rang de la solution (figure 9).

- Il en va de même pour la stabilisation à la Tikhonov.... (figure 10)

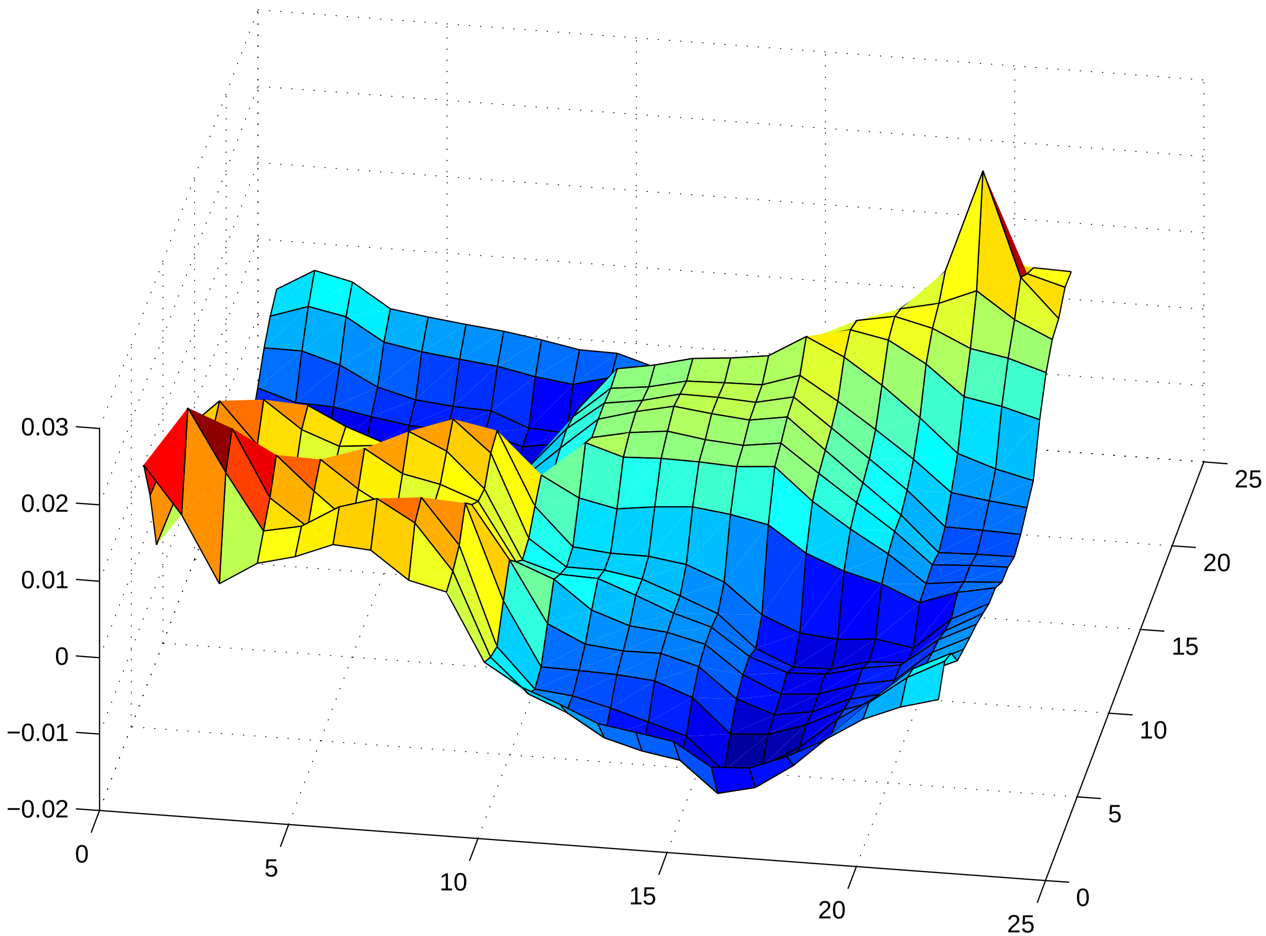

Figure 9: Solution du problème de calibration avec contraintes de régularité

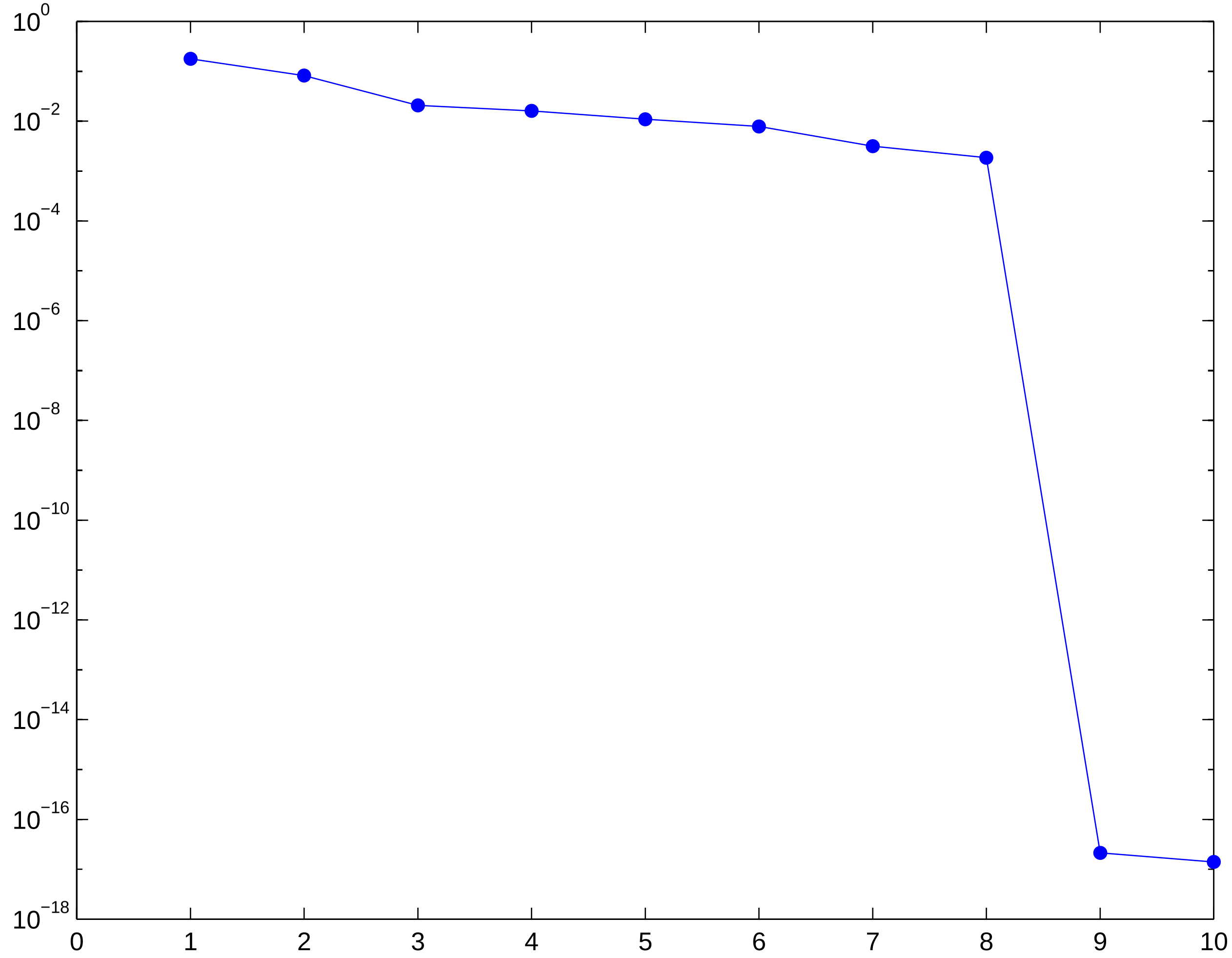

Figure 10: Valeurs propres de la matrice régulière.

3.5 Conclusion

- Une justification de la formule de marché sur les swaptions.
- Une formule d'évaluation du prix des options sur panier dans le cas log-normal.
- On obtient un algorithme de calibration d'un modèle de marché sur les LIBORS avec une complexité connue.
- Idem pour la gestion des riques et le calcul des sensibilités.
- Preuve de convergence ou d'infaisabilité.
- Stabilisation possible, compromis rang - stabilité.

3.6 Problèmes ouverts

- Évaluation des swaptions: une formule pour la calibration *jointe* du smile et de la corrélation (voir Avellaneda et al. (2002))
- Monte-Carlo américain: seule véritable solution au problème du rang et donc à celui de la stabilisation....
- Problème statique... Infaisabilité: pauvreté du modèle ou arbitrage? (voir Henkin & Shananin (1990), d'Aspremont & El Ghaoui (2002)).
- ...

3.7 Remerciements

Merci papa, merci maman...

References

Avellaneda, M., Boyer-Olson, D., Busca, J. & Friz, P. (2002), 'Reconstruction of volatility: Pricing index options using the steepest-descent approximation', *Risk (To appear)* .

Avellaneda, M. & Paras, A. (1996), 'Managing the volatility risk of portfolios of derivative securities: the lagrangian uncertain volatility model', *Applied Mathematical Finance* 3, 21–52.

Black, F. & Scholes, M. (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *Journal of Political Economy* 81, 637–659.

Brace, A., Dun, T. & Barton, G. (1999), 'Towards a central interest rate model', *Working Paper. FMMA* .

Brace, A., Gatarek, D. & Musiela, M. (1997), 'The market model of interest rate dynamics', *Mathematical Finance* 7(2), 127–155.

Brace, A. & Womersley, R. S. (2000), 'Exact fit to the swaption volatility matrix using semidefinite programming', *Working paper, ICBI Global Derivatives Conference* .

Cont, R. (2001), 'Inverse problems in financial modeling: theoretical and numerical aspects of model calibration.', *Lecture Notes, Princeton University.* .

d'Aspremont, A. & El Ghaoui, L. (2002), 'Static arbitrage bounds on basket option prices', *EECS Technical report, UC Berkeley.* .

El Karoui, N., Jeanblanc-Picqué, M. & Shreve, S. E. (1998), 'On the robustness of the black-scholes equation', *Mathematical Finance* 8, 93–126.

El Karoui, N. & Rochet, J. C. (1989), 'A pricing formula for options on coupon bonds', *Preprint, University of Paris VI.* .

Fazel, M., Hindi, H. & Boyd, S. (2000), 'A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation', *American Control Conference, September 2000* .

Fournié, E., Lebuchoux, J. & Touzi, N. (1997), 'Small noise expansion and importance sampling', *Asymptotic Analysis* 14, 361–376.

Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A. (1992), 'Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology', *Econometrica* 61(1), 77–105.

Henkin, G. & Shananin, A. (1990), 'Bernstein theorems and radon transform, application to the theory of production functions.', *Translation of mathematical monographs* 81, 189–223.

Lebuchoux, J. & Musiela, M. (1999), ‘Market models and smile effects in caps and swaptions volatilities.’, *Working paper, Paribas Capital Markets.* .

Nesterov, I. E. & Nemirovskii, A. S. (1994), *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Nesterov, I. E. & Todd, M. (1998), ‘Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones.’, *SIAM Journal on Optimization* 8, 324–364.

Rebonato, R. (1998), *Interest-Rate Options Models*, Financial Engineering, Wiley.

Rebonato, R. (1999), ‘On the simultaneous calibration of multi-factor lognormal interest rate models to black volatilities and to the correlation matrix.’, *Working paper* .

Singleton, K. J. & Umantsev, L. (2001), 'Pricing coupon-bond options and swaptions in affine term structure models', *Working paper, Stanford University Graduate School of Business.* .

Todd, M. & Yildirim, E. A. (1999), 'Sensitivity analysis in linear programming and semidefinite programming using interior-points methods.', *Working paper, School of Operation Research and Industrial Engineering, Cornell University.* .

Vandenberghe, L. & Boyd, S. (1996), 'Semidefinite programming', *SIAM Review* 38, 49–95.